回路とシステム
第五回
線形回路の解析

舟木　剛

2020年11月2日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

タブロー方程式での表現

- $$\begin{array}{c} n-1 \\ b \\ b \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I_b & 0 \\ 0 & M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ FU(s)+Gx^0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{KCL} \\ \text{KVL} \\ \text{枝電圧電流} \end{array}$$
  - I_b: $b \times b$の単位行列

- $$T \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

節点方程式と閉路方程式を混ぜた表現

- $$\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

電圧源と電流源の両方を含める

タブロー方程式での表現

- $\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = H(s)U(s) + Q(s)x^0$
  - $H(s) = T^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}, \qquad Q(s) = T^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix}$
  - $H(s)U(s)$　　初期値x^0を0とした入力$U(s)$に対する応答
    - 零状態応答
  - $Q(s)x^0$ 入力$U(s)$を0とした初期値x^0に対する応答
    - 零入力応答

零入力の時間応答

- $T^{-1}(s) = \dfrac{\mathrm{adj}T(s)}{\det T(s)}$
  - $\det T(s)$　　　N次の特性多項式(行列式)
  - $\mathrm{adj}T(s)$　　　余因子行列
- 特性多項式
  - $\det T = K(s-\lambda_1)\cdots(s-\lambda_N)$
  - 特性多項式を分母に持つ分数→部分分数分解
    - $Y_{zi}(s) = \dfrac{\text{初期値で決まる多項式}}{\text{特性多項式}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{s-\lambda_i}$

零入力の時間応答

- 逆ラプラス変換
  - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s-\lambda}\right] = Ke^{\lambda t}$　　重根の無い場合
- 時間領域の応答
  - $y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i e^{\lambda_i t}$
    - K_i:初期値で決まる。$e^{\lambda_i t}$:特性方程式で決まる
    - λ_i:固有周波数，特性方程式の根。
      - 実数:単調変化
      - 虚数:持続振動
      - 複素数:減衰振動

受動回路では実部が負になる
0に収束する $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$

零入力の時間応答

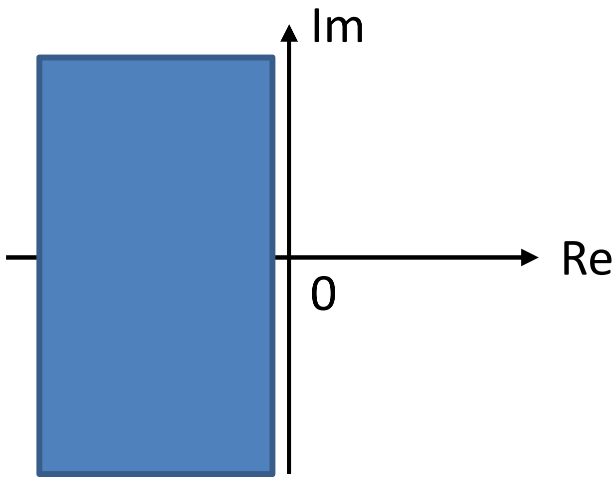
- λが複素数$\lambda = \alpha + j\beta$の場合
  - 共役複素数の根$\lambda^* = \alpha - j\beta$が対で存在
    - $(\lambda - \alpha - j\beta)(\lambda - \alpha + j\beta) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$
      $= \lambda^2 - 2\lambda\alpha + \alpha^2 + \beta^2$
    - 実部αは受動回路では負となる
      - $t \to \infty$で0に収束する $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = \lim_{t\to\infty} e^{(\alpha+j\beta)t} = \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} = 0$
    - 時間応答の虚部は観測できない
      - $e^{\lambda t} = e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha t}e^{j\beta t} = e^{\alpha t}\{\cos\beta t + j\sin\beta t\}$

零入力の時間応答

- λが複素数$\lambda = \alpha + j\beta$の場合$K$も複素数
  - λ^*のK^*はKの共役複素数となる
    - 極座標で考える
    - $K = |K|e^{j\phi}$とすると$K^* = |K|e^{-j\phi}$
- 時間応答では減衰正弦波振動が観測される
  - $Ke^{\lambda t} + K^* e^{\lambda^* t} = |K|e^{j\phi}e^{(\alpha+j\beta)t} + |K|e^{-j\phi}e^{(\alpha-j\beta)t}$
    $= |K|e^{\alpha t}\left\{e^{j(\phi+\beta t)} + e^{-j(\phi+\beta t)}\right\}$
    $= |K|e^{\alpha t}\{\cos(\phi + \beta t) + j\sin(\phi + \beta t)$
    $+ \cos -(\phi + \beta t) + j \sin -(\phi + \beta t)\}$
    $= 2|K|e^{\alpha t}\cos(\phi + \beta t)$

漸近安定性

- 特性方程式の根
  - 実部がすべて負→全ての$\frac{K_i}{s-\lambda_i}$の時間応答$K_i e^{\lambda_i t}$は0に収束する
    - 根は複素平面上の開左半面に存在する



零状態応答

- 初期条件を0とした入力$U(s)$に対する応答
  - m個の電源で構成される入力電源ベクトル

$$U(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e}_i u_i(s)$$

  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{U}(s) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{e}_i u_i(s) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{H}(s) u_i(s)$
    - 出力$\boldsymbol{Y}(s)$はm個の入力$u_i(s)$の一次結合

伝達関数

- 伝達関数とは入力に対する出力の比
  $$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)}$$
  - $\boldsymbol{H}(s)$は伝達関数行列
  - 1入力1出力の場合
    - 入力電圧、出力電圧 → 電圧伝達関数
    - 入力電流、出力電流 → 電流伝達関数
    - 入力電流、出力電圧 → 伝達インピーダンス
      - 入出力が同じ節点 → 駆動点インピーダンス
    - 入力電圧、出力電流 → 伝達アドミタンス
      - 入出力が同じ節点 → 駆動点アドミタンス

零状態応答

- 入力$u(t)$に対する零状態応答$y(t)$
- 時間がずれても伝達関数は変化しない
  - 時間がTずれた入力$u(t-T)$に対する零状態応答$y(t-T)$
  - 入力$\mathcal{L}[u(t-T)] = u(s)e^{-sT}$
  - 出力$H(s)u(s)e^{-sT} = Y(s)e^{-sT}$
    - $Y(s) = H(s)u(s)$

重ね合わせの理

- 零状態応答
  - 入力$U(s) = \sum_{i=1}^{m} u_i(s)$以外を0として入力$u_i(s)$のみによる応答
    - 複数の入力$V(s), W(s)$
      $U(s) = \alpha V(s) + \beta W(s) \quad \alpha,\beta$:定数
    - 全応答=$\alpha V(s)$に対する零状態応答+$\beta W(s)$に対する零状態応答
      - 複数の入力に対する零状態応答を加え合わすと全入力に対する応答となる

インパルス応答

- 単位インパルス関数
  - $\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
  - $\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$
- 単位インパルス入力$u(t) = \delta(t)$に対する零状態応答$y(t) = h(t)$
  - $Y(s) = H(s)U(s) = H(s)$
  - 単位インパルス応答のラプラス変換=伝達関数

ステップ応答

- ステップ入力に対する零状態応答
  - 単位ステップ入力$u(t) = 1_+(t)$
  - 零状態応答$y(t) = s(t)$
- ステップ応答とインパルス応答の関係
  - 時間領域$\frac{d}{dt}s(t) = h(t)$
    - $s(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)d\tau \quad t > 0$
  - S領域$S(s) = \frac{H(s)}{s}$
- $t < 0$では入力、初期条件は0
  - 応答も0　　$h(t) = 0, s(t) = 0$

畳み込み積分

- S領域の掛け算は、時間領域の畳み込み積分
  - S領域 $Y(s) = H(s)U(s)$
  - 時間領域 $y_{zs}(t) = h(t) \otimes u(t) =$

$$u(t) \otimes h(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \int_{0^-}^{t^+} h(t)u(\tau-\tau)d\tau$$

安定伝達関数

- 伝達関数$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$
  - sの分子多項式$N(s)$、分母多項式$D(s)$
  - 零点　$N(s) = 0$の根$s = z_i$
  - 極　　$D(s) = 0$の根$s = p_i$
    - 極によりインパルス応答が決まる

安定伝達関数

- 伝達関数:入力に対する出力の比
  - $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$
    - $N(s)$:sの分子多項式
    - $D(s)$:sの分母多項式
      - p_i:極。$D(s) = 0$の根

安定伝達関数

- 伝達関数の部分分数展開
  - $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = a_m s^m + \cdots + a_0 + \sum_{i=1} \frac{L_i}{s - p_i}$
    - $m = \mathrm{deg}N(s) - \mathrm{deg}D(s) \geq 0$の場合、多項式に$a_i$の成分が現れる
      - 分子の次数$\mathrm{deg}N(s)$
      - 分母の次数$\mathrm{deg}D(s)$
      - $\mathrm{deg}N(s) < \mathrm{deg}D(s)$の場合分数のみになる
        - 厳密にプロパー

安定伝達関数

- インパルス応答
  - $h(t) = a_m \delta^{(m)}(t) + \cdots + a_0 \delta(t) + \sum_{i=1} L_i e^{p_i t} 1_+(t)$
    - $t \neq 0$ に対して$a_i \delta^{(i)}(t) = 0$
    - すべて極の実部$\mathrm{Re}[p_i]$が$\mathrm{Re}[p_i] < 0$
      - $t \to \infty$でインパルス応答は0に収束
        - $\lim_{t \to \infty} e^{p_i t} = 0$