

# 回路とシステム

## 第11回

### 2ポート回路

舟木 剛

2020年12月21日2限

# 講義計画

- 回路方程式 1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
  - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
  - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、 $\pi$ 形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回
  - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
  - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
  - 平衡三相回路

# 2ポート行列変換表

	$Z$	$Y$	$H$	$F$
$Z$	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det Y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \det F \\ 1 & D \end{bmatrix}$
$Y$	$\frac{1}{\det Z} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\det F \\ -1 & A \end{bmatrix}$
$H$	$\frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \det Z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{22} & \det Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \det F \\ -1 & C \end{bmatrix}$
$F$	$\frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \det Z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_{21}} \begin{bmatrix} -y_{22} & -1 \\ \det Y & -y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\det H & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

# 相反2ポート回路

- 相反条件

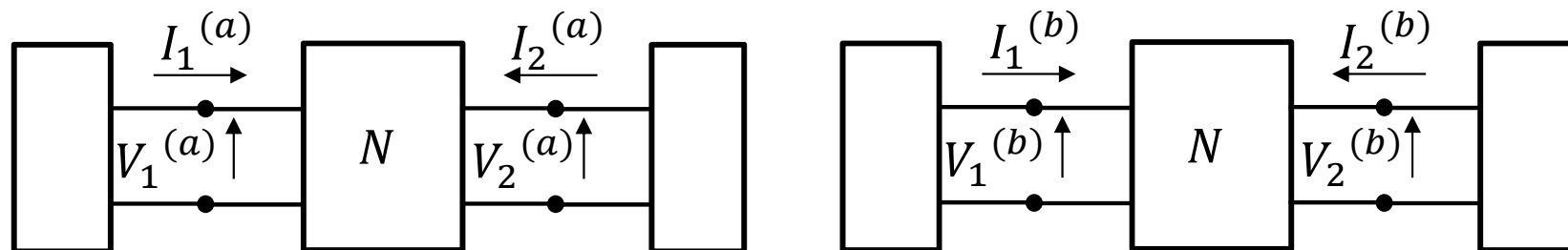
- 異なる条件  $a, b$  で動作しているポート電流  $I^{(a)}$ ,  $I^{(b)}$  とポート電圧  $V^{(a)}$ ,  $V^{(b)}$  の積和が一致する

- $I^{(a)}(s)^T V^{(b)}(s) = I^{(b)}(s)^T V^{(a)}(s)$

- 内部の電圧・電流に依らない

- 相反2ポート回路

- $I_1^{(a)} V_1^{(b)} + I_2^{(a)} V_2^{(b)} = I_1^{(b)} V_1^{(a)} + I_2^{(b)} V_2^{(a)}$



# 相反2ポート回路

- 相反2ポート回路のインピーダンス行列Z表現
  - $I^{(a)}(s)^T \mathbf{Z}(s) I^{(b)}(s) = I^{(b)}(s)^T \mathbf{Z}(s) I^{(a)}(s)$
  - $V_i^{(b)} = \sum_{j=1}^n z_{ij} I_j^{(b)}$
  - $P = \sum_{i=1}^n I_i^{(a)} V_i^{(b)} = \sum_{i=1}^n I_i^{(a)} \sum_{j=1}^n z_{ij} I_j^{(b)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} I_i^{(a)} I_j^{(b)}$
  - $V_i^{(a)} = \sum_{j=1}^n z_{ij} I_j^{(a)}$
  - $P = \sum_{i=1}^n I_i^{(b)} V_i^{(a)} = \sum_{i=1}^n I_i^{(b)} \sum_{j=1}^n z_{ij} I_j^{(a)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} I_i^{(b)} I_j^{(a)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ji} I_i^{(a)} I_j^{(b)}$
  - 任意の  $I^{(a)}(s), I^{(b)}(s)$  について成り立つ
    - $z_{ij} = z_{ji} \quad \rightarrow \quad \text{対称行列 } \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}$

# 相反2ポート回路

- 必要十分条件

- $Z_{ij} = Z_{ji} \rightarrow$  伝達インピーダンスが等しい

- $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$ より

- $y_{12} = y_{21} \rightarrow$  伝達アドミタンスが等しい

- $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{Z} & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix}$ より

- $h_{12} = -h_{21} \rightarrow$  電圧伝達関数と電流伝達関数が等しい

# 相反2ポート回路

- 必要十分条件

- $\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \det F \\ 1 & D \end{bmatrix}$ より

- $\det F = AD - BC = 1$

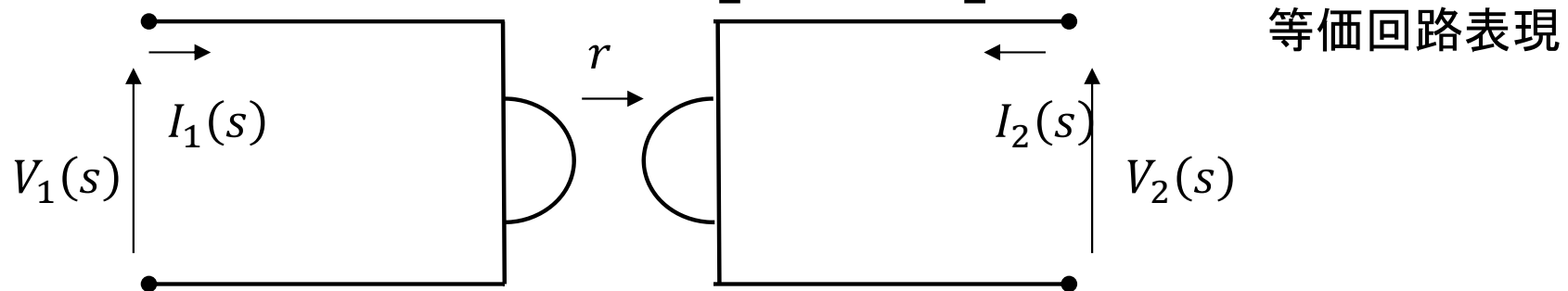
- 線形時不変RLC回路のテレゲン定理

- $I_1^{(a)} V_1^{(b)} + I_2^{(a)} V_2^{(b)} = \sum_{\text{内部枝}} I_k^{(a)} V_k^{(b)} =$   
 $\sum_{\text{内部枝}} I_k^{(a)} Z_k I_k^{(b)} = \sum_{\text{内部枝}} V_k^{(a)} I_k^{(b)} =$   
 $V_1^{(a)} I_1^{(b)} + V_2^{(a)} I_2^{(b)}$

# 非相反回路

- ジャイレータ
  - インピーダンスを反転させる回路
  - $V_1 = -rI_2$      $V_2 = rI_1$

$$\bullet \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$





# 相反2ポート回路のT型等価回路

- $z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3 \quad V_1 = (z_{11} - z_{12})I_1 + z_{12}I_2 = z_{11}I_1$

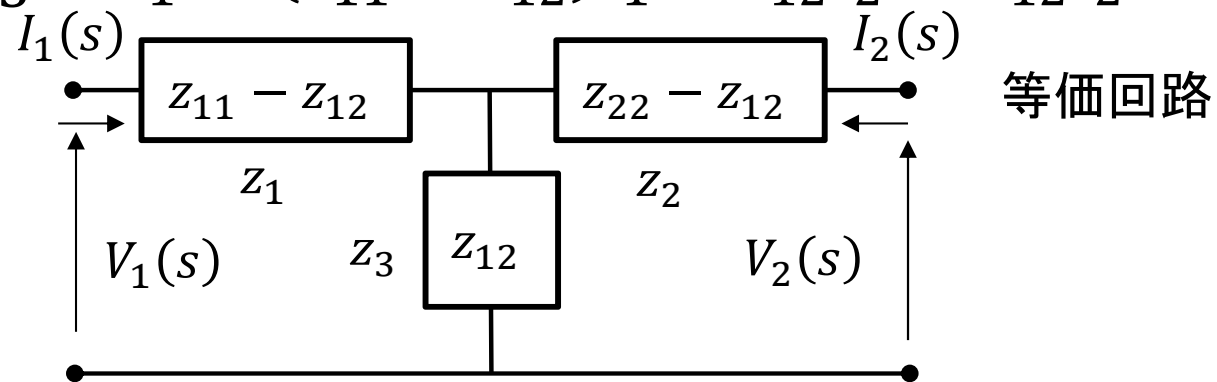
- $z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_3 \quad V_2 = z_{12}I_1 + (z_{22} - z_{12})I_2 = z_{12}I_1$

- $z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3 \quad V_2 = (z_{22} - z_{12})I_2 + z_{12}I_2 = z_{22}I_2$

- $z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_3 \quad V_1 = (z_{11} - z_{12})I_1 + z_{12}I_2 = z_{12}I_2$

2ポート回路の相反条件

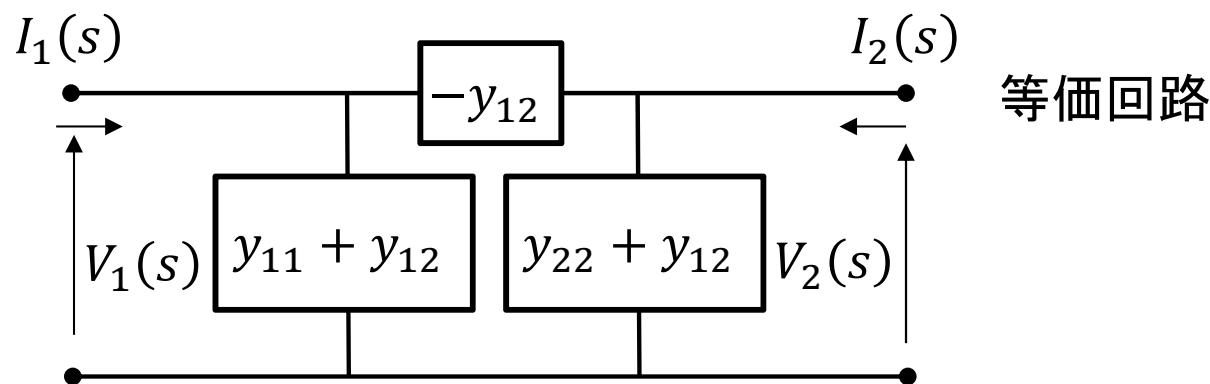
$$z_{12} = z_{21}$$



# 相反2ポート回路のπ型等価回路

- $y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$ 
 $I_1 = (y_{11} + y_{12})V_1 - y_{12}V_1 = y_{11}V_1$
- $y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$ 
 $I_2 = (y_{22} + y_{12})V_2 - y_{12}(0 - V_1) = y_{12}V_1$
- $y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$ 
 $I_2 = -y_{12}V_2 + (y_{22} + y_{12})V_2 = y_{22}V_2$
- $y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$ 
 $I_1 = (y_{11} + y_{12})V_1 - y_{12}(0 - V_2) = y_{12}V_2$

2ポート回路の相反条件  
 $y_{12} = y_{21}$

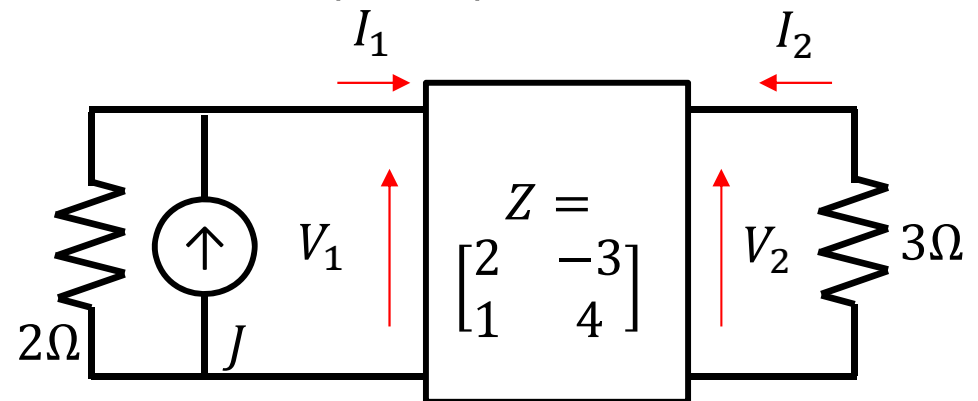


# 2ポート回路を用いた解析例

- 各ポート電圧・電流を求める
 
$$V_1 = 2I_1 - 3I_2 = 2I_1 + \frac{3I_1}{7} = \frac{17I_1}{7}$$
- Z行列
 
$$= \frac{17}{7} \left( 31 - \frac{V_1}{2} \right)$$

$$7V_1 = 17 \left( 31 - \frac{V_1}{2} \right)$$
- ポート1に接続された電流源と抵抗の並列回路
 
$$\frac{31V_1}{2} = 17 \times 31$$
  - $J = 31\text{A}$
  - $I_1 = J - \frac{V_1}{2} = 31 - \frac{V_1}{2}$
- ポート2に接続された抵抗
 
$$V_1 = 34$$

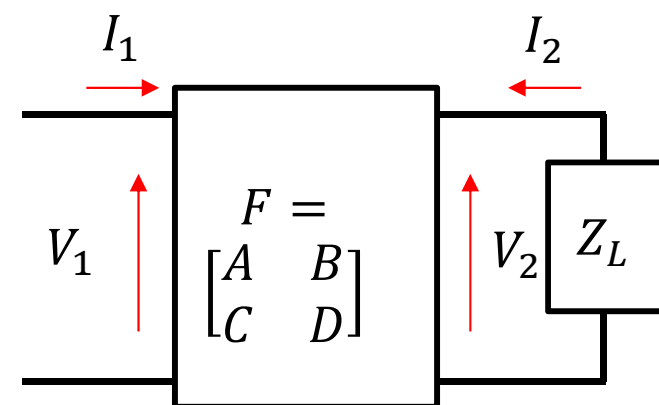
$$I_1 = 31 - \frac{34}{2} = 14$$
  - $I_2 = -\frac{V_2}{3}$
  - $V_2 = I_1 + 4I_2 = I_1 - \frac{4V_2}{3}$
  - $I_1 = \frac{7V_2}{3} = \frac{7}{3}(I_1 + 4I_2)$
  - $-I_1 = 7I_2$
  - $I_2 = \frac{-I_1}{7}$
$$V_2 = \frac{3 \times 14}{7} = 6 \quad I_2 = \frac{-14}{7} = 2$$



# 2ポート回路を用いた解析例

- 入力インピーダンスを求める
- 負荷インピーダンス  $Z_L$ 
  - $V_2 = -I_2 Z_L$
- F行列
  - $V_1 = AV_2 - BI_2$ 
    - $V_1 = -AZ_L I_2 - BI_2 = -(AZ_L + B)I_2$
  - $I_1 = CV_2 - DI_2$ 
    - $I_1 = -CZ_L I_2 - DI_2 = -(CZ_L + D)I_2$
- 入力インピーダンス

$$\bullet Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{-(AZ_L + B)I_2}{-(CZ_L + D)I_2} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$



# 2ポート回路を用いた解析例

- F行列とポート①側の回路に対するテブナン等価回路を求める

- ポート②開放  $I_2 = 0$  における電圧源と直列インピーダンス

- $V_1 = AV_2 - BI_2 = AV_2$

- $I_1 = CV_2 - DI_2 = CV_2$

- $\frac{V_1}{I_1} = \frac{A}{C}$

- $V_1 = E - I_1 Z_1 = E - I_1 \frac{C}{A} V_1 Z_1$

- $V_1 = \frac{A}{A+CZ_1} E \rightarrow V_{op} = V_2 = \frac{E}{A+CZ_1}$

- ポート②短絡  $V_2 = 0$  における電流  $I_2$

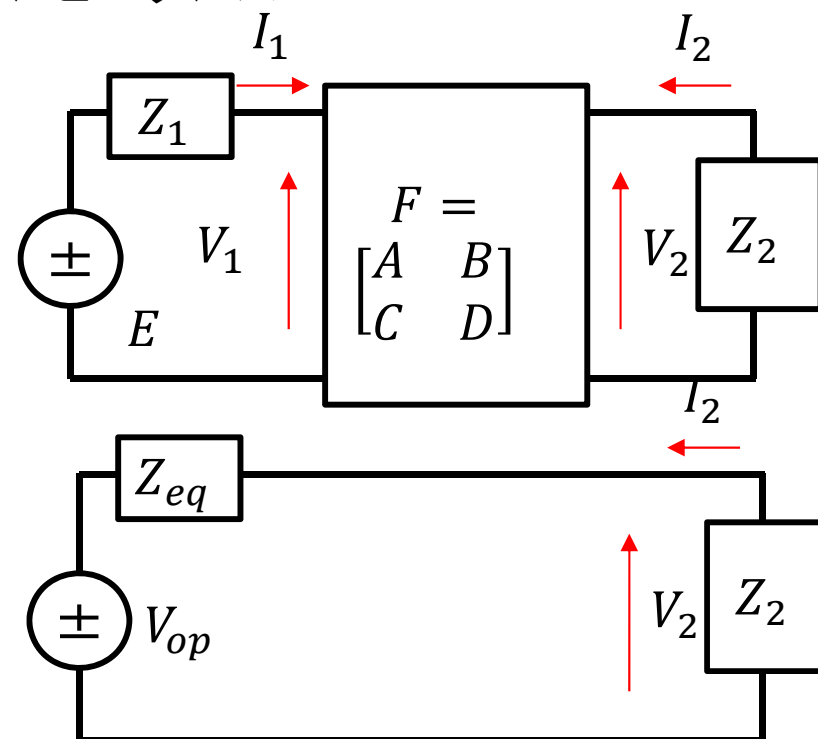
- $V_1 = AV_2 - BI_2 = -BI_2$

- $I_1 = CV_2 - DI_2 = -DI_2$

- $\frac{V_1}{I_1} = \frac{B}{D}$

- $I_1 = \frac{E-V_1}{Z_1} = \frac{E-\frac{B}{D}I_1}{Z_1} = \frac{E}{Z_1} - \frac{BI_1}{DZ_1}$

- $I_1 = \frac{D}{B+DZ_1} E \rightarrow I_{sh} = I_2 = \frac{-E}{B+DZ_1}$



$$Z_{eq} = \frac{V_{op}}{-I_{sh}} = \frac{\frac{E}{A+CZ_1}}{\frac{-E}{B+DZ_1}} = \frac{B+DZ_1}{A+CZ_1}$$