

回路とシステム

第13回

状態方程式

舟木 剛

2021年1月18日2限

講義計画

- 回路方程式 1回
 - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
 - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
 - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回
 - テブナン・ノートンの定理
 - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回
 - 2ポート回路の行列表現
 - 相反2ポート回路
 - 相互接続
 - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、 π 形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回
 - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
 - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
 - 平衡三相回路

状態方程式

- 線形時不変回路

- 状態方程式

- 一階連立微分方程式による回路方程式

- $\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}u_j(t)$

- $x_i(t)$:状態変数($i = 1 \dots n$)※電圧, 電流

- $u_i(t)$:独立電源($i = 1 \dots m$)

- 出力方程式

- $y_k(t) = \sum_{j=1}^n c_{kj}x_j(t) + \sum_{j=1}^m d_{kj}u_j(t)$

- $y_i(t)$:観測変数($i = 1 \dots p$)

状態方程式

- 状態変数のベクトル表記
 - $\dot{\mathbf{x}}^T = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]$
 - $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
 - $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_m]$
 - $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_p]$
- 係数行列
 - $\mathbf{A} = [a_{ij}] \quad n \times n$
 - $\mathbf{B} = [b_{ij}] \quad n \times m$
 - $\mathbf{C} = [c_{ij}] \quad p \times n$
 - $\mathbf{D} = [d_{ij}] \quad p \times m$
- 状態方程式
 - $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$
 - 未来の状態がわかる
- 出力方程式
 - $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$
 - 現在の出力がわかる

状態方程式

- 利点
 - 計算機に実装しやすい(行列計算)
 - 安定性判別等の解析が容易(固有値計算)
 - 時変系, 非線形系への対応が可能
 - 回路内部状態の応答がわかる

状態方程式

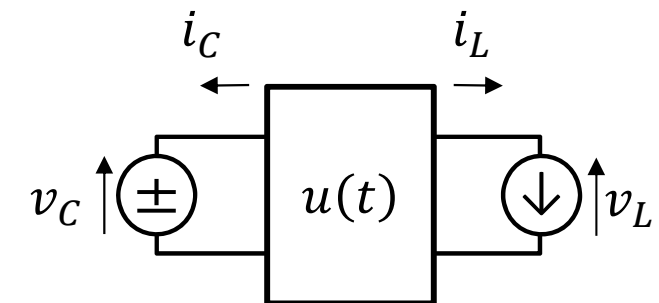
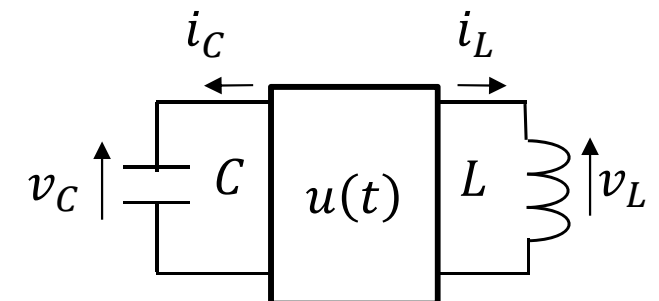
- 抵抗と独立電源から成る回路 $u(t)$ に接続されたコンデンサ・リアクトルの電圧・電流応答

- $C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t)$

- $L \frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t)$

- 状態方程式を求めるための等価回路

- 代入定理の適用
 - コンデンサを独立電圧源 v_C
 - リアクトルを独立電流源 i_L



状態方程式

- 外部電源 v_C, i_L と内部電源 u により決まる i_C, v_L を重ね合わせの理で表す

- $$\begin{cases} i_C(t) = a'_{11}v_C(t) + a'_{12}i_L(t) + b'_1u(t) \\ v_L(t) = a'_{21}v_C(t) + a'_{22}i_L(t) + b'_2u(t) \end{cases}$$

- $$\begin{cases} C \frac{dv_C(t)}{dt} = a'_{11}v_C(t) + a'_{12}i_L(t) + b'_1u(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = a'_{21}v_C(t) + a'_{22}i_L(t) + b'_2u(t) \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{a'_{11}}{C}v_C(t) + \frac{a'_{12}}{C}i_L(t) + \frac{b'_1}{C}u(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{a'_{21}}{L}v_C(t) + \frac{a'_{22}}{L}i_L(t) + \frac{b'_2}{L}u(t) \end{cases}$$

状態方程式例題

- 例題

- KVL

- $-u + v_L + R_1(i_L - i_C) = 0$

- $R_2 i_C + v_C - R_1(i_L - i_C) = 0$

- 動特性

- $v_L = L \frac{di_L}{dt}$

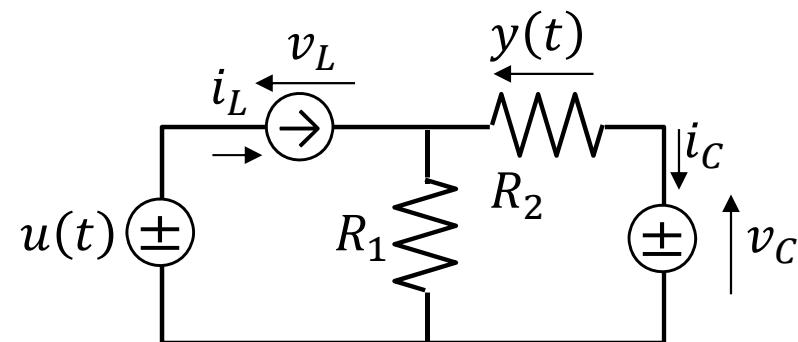
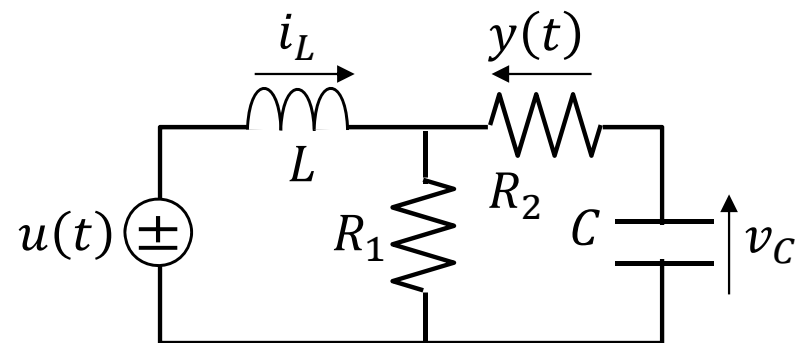
- $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

- 状態方程式

- $$\begin{cases} -u + L \frac{di_L}{dt} + R_1 \left(i_L - C \frac{dv_C}{dt} \right) = 0 \\ R_2 C \frac{dv_C}{dt} + v_C - R_1 \left(i_L - C \frac{dv_C}{dt} \right) = 0 \end{cases}$$

- 出力方程式

- $y = R_2 i_C$



状態方程式例題

- $$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} - R_1 C \frac{dv_C}{dt} = -R_1 i_L + u \\ (R_1 + R_2) C \frac{dv_C}{dt} = R_1 i_L - v_C \end{cases}$$
- $$\begin{bmatrix} L & -R_1 C \\ 0 & (R_1 + R_2) C \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} L & -R_1 C \\ 0 & (R_1 + R_2) C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(R_1 + R_2) CL} \begin{bmatrix} (R_1 + R_2) C & R_1 C \\ 0 & L \end{bmatrix}$$
- $$\begin{aligned} & \frac{1}{(R_1 + R_2) CL} \begin{bmatrix} (R_1 + R_2) C & R_1 C \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{(R_1 + R_2) CL} \begin{bmatrix} -R_1(R_1 + R_2)C + R_1^2 C & -R_1 C \\ R_1 L & -L \end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1 + R_2) CL} \begin{bmatrix} -R_1 R_2 C & -R_1 C \\ R_1 L & -L \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状態方程式例題

- $$\frac{1}{(R_1+R_2)CL} \begin{bmatrix} (R_1 + R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL} \begin{bmatrix} (R_1 + R_2)Cu \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1+R_2} \begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 出力方程式

- $$y = R_2 i_C = R_2 C \frac{dv_C}{dt} = \frac{R_2 C}{R_1+R_2} \begin{bmatrix} \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \begin{bmatrix} R_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

状態方程式例題

- 結合インダクタを含む回路

- 状態変数

- i_1, i_2, v_C

- 結合インダクタの電圧・電流

- $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

- KVL

- $v_1 = u - R_1 i_1$

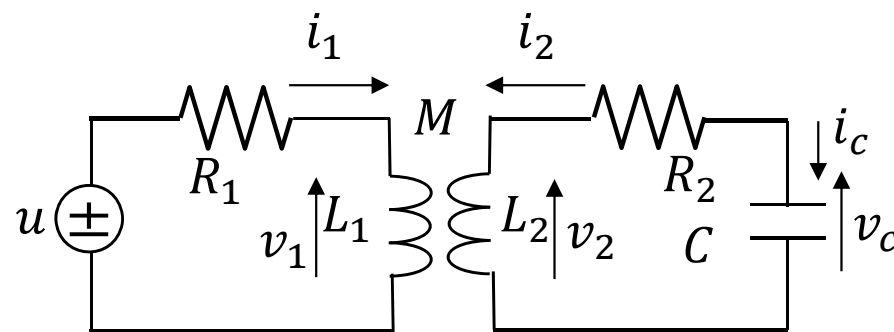
- $v_2 = v_C - R_2 i_2$

- コンデンサ

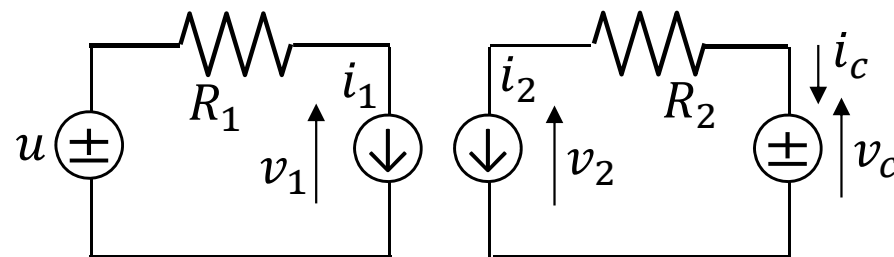
- $C \frac{d}{dt} v_C = i_C = -i_2$

- 状態方程式

- $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_C \end{bmatrix}$



等価回路



状態方程式例題

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \left\{ \begin{bmatrix} -L_2 R_1 & MR_2 \\ MR_1 & -L_1 R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u L_2 & -M v_c \\ -M u & L_1 v_c \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \left\{ \begin{bmatrix} -L_2 R_1 & MR_2 & -M \\ MR_1 & -L_1 R_2 & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ -M \end{bmatrix} u \right\} \\
 \bullet \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{MR_2}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{MR_1}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{-L_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \\ 0 & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \\ 0 \end{bmatrix} u
 \end{aligned}$$

状態方程式の解

- 状態方程式

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ $\mathbf{A}: n \times n, \mathbf{B}: n \times m$

- $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$ $\mathbf{C}: p \times n, \mathbf{D}: p \times m$

- $n = 2, m = 1, p = 1$ のケース

- $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u$

- $\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$

- $y = c_1x_1 + c_2x_2 + du$

状態方程式の解

- ラプラス変換

- $sX_1(s) - x_1(0^-) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + b_1U(s)$

- $sX_2(s) - x_2(0^-) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + b_2U(s)$

- $Y(s) = c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + dU(s)$

- 行列表現

- $\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$

- $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$

- $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s)$

状態方程式の解

- 行列表現

- $(sI - A)X(s) = \boldsymbol{x}(0^-) + \boldsymbol{B}U(s)$

- $X(s) = (sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + (sI - A)^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$

- $Y(s) = \boldsymbol{C}[(sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + (sI - A)^{-1}\boldsymbol{B}U(s)] + \boldsymbol{D}U(s)$

- $= \boldsymbol{C}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$

- $+ [\boldsymbol{C}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]U(s)$

- 零入力応答 $U(s) = 0$ $\boldsymbol{C}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$

- 零状態応答 $\boldsymbol{x}(0^-) = 0$ $[(sI - A)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]U(s)$

状態方程式の解

- 状態方程式

- $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ $\boldsymbol{A}: n \times n, \boldsymbol{B}: n \times m$

- $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$ $\boldsymbol{C}: p \times n, \boldsymbol{D}: p \times m$

- 状態変数: $\boldsymbol{x}(t)$

- 入力変数: $\boldsymbol{u}(t)$

- 出力変数: $\boldsymbol{y}(t)$

- 行列表現

- $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s)$

- $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$

- $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

- ラプラス変換

- $sX_1(s) - x_1(0^-) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + b_1U(s)$

- $sX_2(s) - x_2(0^-) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + b_2U(s)$

- $Y(s) = c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + dU(s)$