回路とシステム
第14回
状態方程式
三相回路

舟木　剛

2021年1月25日2限

講義計画

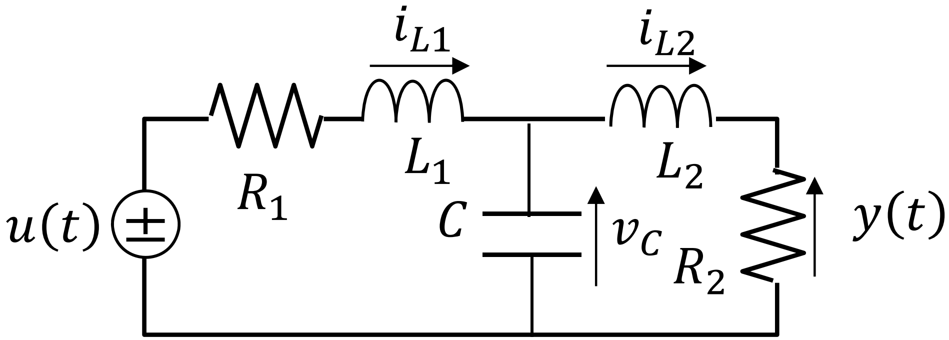
- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

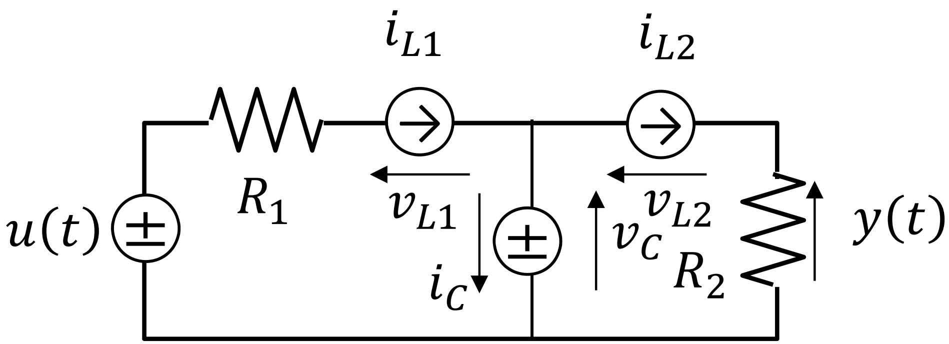
状態方程式の零状態応答

- 零状態
  - 初期状態　$\boldsymbol{x}(0^-) = 0$
  - 入力　$u(t)$
- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - ラプラス変換
    - $s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
    - $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
    - $\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
- 出力方程式
  - $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$
    - $\boldsymbol{Y}(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s) = \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{U}(s)$
      - $\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$
- 伝達関数
  - $\dfrac{\boldsymbol{Y}(s)}{U(s)} = \boldsymbol{H}(s)$

伝達関数の求解例

- 入力$u(t)$, 出力$y(t)$
- KVL
  - $u - R_1 i_{L1} - v_{L1} - v_c = 0$
  - $R_2 i_{L2} + v_{L2} - v_C = 0$
- KCL
  - $i_C = i_{L1} - i_{L2}$
- 動特性
  - $v_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}$
  - $v_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$
  - $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$
- 状態方程式
  - $\begin{cases} u - R_1 i_{L1} - L_1 \frac{di_{L1}}{dt} - v_c = 0 \\ R_2 i_{L2} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} - v_C = 0 \\ i_{L1} - i_{L2} = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$





- 出力方程式
  - $y = R_2 i_{L2}$

伝達関数の求解例

- 状態方程式の変形

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{u}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{v_c}{L_1}$$

- $$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{R_2 i_{L2}}{L_2} + \frac{v_C}{L_2}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_{L1}}{C} - \frac{i_{L2}}{C}$$

- 出力方程式の変形
  - 行列表示
  - $$y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix}$$

- 行列表示
  - $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

伝達関数の求解例

- $A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $X = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix}$
- $sX = AX + Bu$
- $(sI - A)X = Bu$
- $X = (sI - A)^{-1}Bu$
- $Y = [0 \quad R_2 \quad 0]X$
  $= [0 \quad R_2 \quad 0](sI - A)^{-1}BU$
- 伝達関数
  - $\frac{Y}{U} = [0 \quad R_2 \quad 0](sI - A)^{-1}B$
- $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}$

伝達関数の求解例

- $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) =$
$$\det\begin{vmatrix} s+\frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s+\frac{R_2}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{vmatrix} =$$
$$\left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)s+\frac{1}{L_1}\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{1}{C}+\left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\frac{1}{L_2}\frac{1}{C}=\left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)s+\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{1}{L_1C}+\left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\frac{1}{L_2C}$$

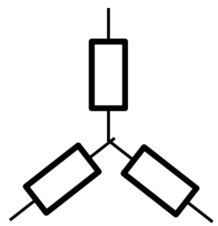
- $\begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2k_{21} & R_2k_{22} & R_2k_{23} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} R_2k_{21} & R_2k_{22} & R_2k_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R_2k_{21}}{L_1}$
- $k_{21} = \mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})_{21}$
$$= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C} & s \end{vmatrix} = \frac{-1}{L_1C}$$

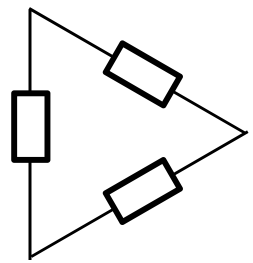
多相交流回路

- 複数の交流電源が回路に同時に存在
  - n個存在→n 相式
  - 周波数が同じ
  - 位相が異なる
  - その他の条件
    - 対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが等しく，位相差が等間隔
    - 非対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが一致しない，または位相差が等間隔でない

多相交流の結合方式

- 独立多相方式　各相が結合されていない
- 結合多相方式　各相が結合されている
  - 平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が一定
  - 不平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が脈動する
  - 星形結線　各相の終端が共通
    - 三相Y結線
  - 環状結線　各相の終端を次相の始端に接続
    - 三相Δ結線





対称多相交流

- 対称n相交流の起電力の瞬時値
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)$
  - $e_n = E_m \sin\left(\omega t - \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)$
    - E_m:振幅
    - ω:角周波数
    - $\frac{2\pi}{n}$:位相差
- ベクトル表記
  - $E_a = E$
  - $E_b = E e^{-j\frac{2\pi}{n}} = E\left(\cos\frac{2\pi}{n} - j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$
  - $E_n = E e^{-j\frac{n-1}{n}2\pi} = E\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi - j\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right)$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}$
    - $E_a = E$
    - $E_b = a^{-1}E$
    - $E_n = a^{-(n-1)}E$

対称n相交流の星形起電力と環状起電力の関係

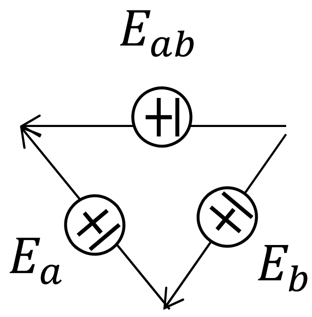
- 星形起電力
  - $E_a, E_b, \cdots, E_n$
- 環状起電力
  - $E_{ab}, E_{bc}, \cdots, E_{na}$
- 関係
  - $E_{ab} = E_a - E_b = E - a^{-1}E = (1 - a^{-1})E$
  - $E_{bc} = E_b - E_c = a^{-1}E - a^{-2}E = a^{-1}(1 - a^{-1})E$
  - $E_{na} = E_n - E_a = a^{-(n-1)}E - E = \left(a^{-(n-1)} - 1\right)E$

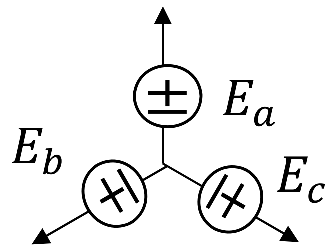
ベクトル計算

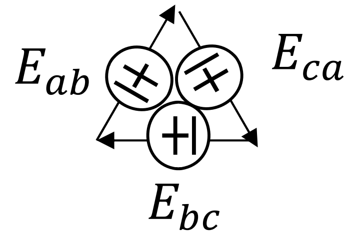
- $1-a^{-1}=1-e^{-j\frac{2\pi}{n}}=1-\cos\frac{2\pi}{n}+j\sin\frac{2\pi}{n}=1-\cos^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}+j2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{n}+j2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+j\cos\frac{\pi}{n}\right)=2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)+j\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\right)=2\sin\frac{\pi}{n}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}=2\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}$
- $E_{ab}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}$
- $E_{bc}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}e^{-j\frac{2\pi}{n}}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{n}\right)}$
- $E_{na}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}e^{-j\frac{(n-1)2\pi}{n}}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{n}\right)}$
- 起電力は$2\sin\frac{\pi}{n}$倍となり，位相は$\frac{\pi}{2}$すすむ

対称n相回路の起電力の関係

- E_a+$E_b + \cdots + E_n = 0$
- $E_{ab} + E_{bc} + \cdots + E_{na} = 0$
- 電流も同様
- $n = 3$→三相交流
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$
  - $e_c = E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$
  - $e_a + e_b + e_c = E_m \sin \omega t + E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_m\left\{\sin \omega t + \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3}\right\} = E_m\left\{\sin \omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t\right\} = 0$







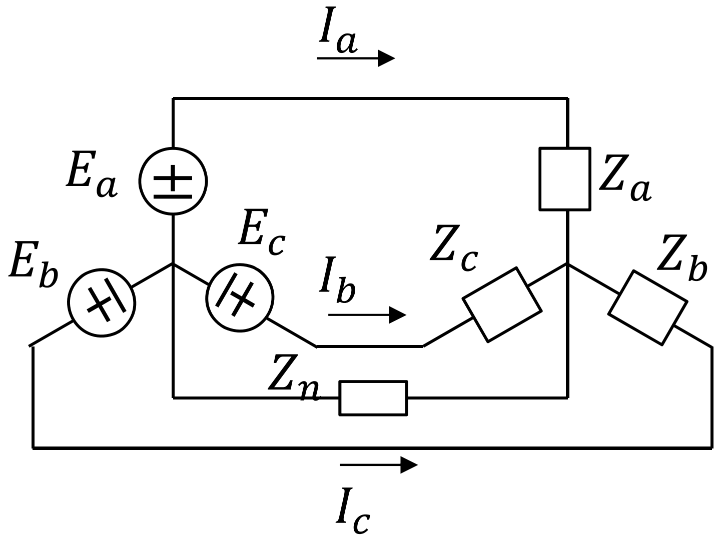
対称3相回路の起電力の関係

- ベクトル表現
  - $E_a = E$
  - $E_b = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} = Ea^{-1}$
  - $E_c = Ee^{-j\frac{4\pi}{3}} = Ea^{-2}$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $a^3 = 1$
  - $1 + a + a^2 = 0$

対称3相回路の起電力の関係

- 相電圧E_a, E_b, E_c
- 線間電圧
  - $E_{ab} = E_a - E_b = E_a(1 - a^2) = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{\pi}{6}}$
  - $E_{bc} = E_b - E_c = E_b(1 - a^2) = \sqrt{3}E_b e^{j\frac{\pi}{6}}$
  - $E_{ca} = E_c - E_a = E_c(1 - a^2) = \sqrt{3}E_c e^{j\frac{\pi}{6}}$
- 線間電圧は相電圧の$\sqrt{3}$倍，位相は$\frac{\pi}{6}$進む

非対称三相交流回路



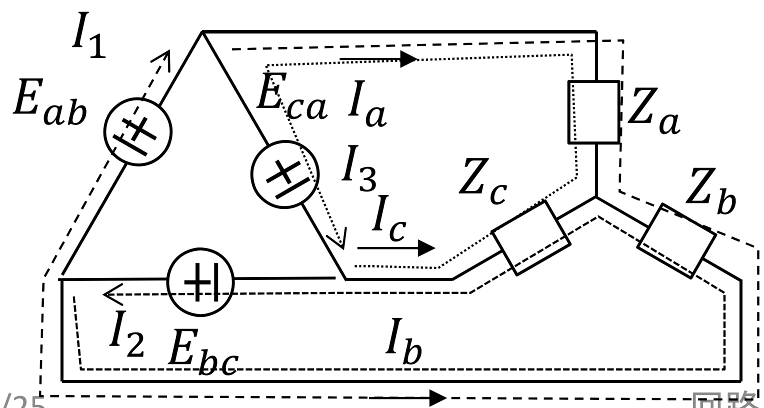
- Y型結線回路
  - $E_a = Z_a I_a + Z_N(I_a + I_b + I_c)$
  - $E_b = Z_b I_b + Z_N(I_a + I_b + I_c)$
  - $E_c = Z_c I_c + Z_N(I_a + I_b + I_c)$
  - $Y_a = \frac{1}{Z_a}, Y_b = \frac{1}{Z_b}, Y_c = \frac{1}{Z_c}, Y_N = \frac{1}{Z_N}$
  - $I_a + Y_a Z_N(I_a + I_b + I_c) = Y_a E_a$
  - $I_b + Y_b Z_N(I_a + I_b + I_c) = Y_b E_b$
  - $I_c + Y_c Z_N(I_a + I_b + I_c) = Y_c E_c$

非対称三相交流回路

- Y型結線回路
  - 中性点の電圧降下
    - $(1+[Y_a+Y_b+Y_c]Z_N)(I_a+I_b+I_c)=Y_aE_a+Y_bE_b+Y_cE_c$
    - $I_N=I_a+I_b+I_c$
    - $(1+[Y_a+Y_b+Y_c]Z_N)I_N=Y_aE_a+Y_bE_b+Y_cE_c$
    - $I_N=\frac{Y_aE_a+Y_bE_b+Y_cE_c}{1+[Y_a+Y_b+Y_c]Z_N}$
    - $V_N=Z_NI_N=Z_N\frac{Y_aE_a+Y_bE_b+Y_cE_c}{1+[Y_a+Y_b+Y_c]Z_N}=\frac{Y_aE_a+Y_bE_b+Y_cE_c}{\frac{1}{Z_N}+Y_a+Y_b+Y_c}$
      $$=\frac{Y_aE_a+Y_bE_b+Y_cE_c}{Y_N+Y_a+Y_b+Y_c}$$
  - 中性線の無い場合
    - $Z_N=\infty, Y_N=\infty, I_N=I_a+I_b+I_c=0$

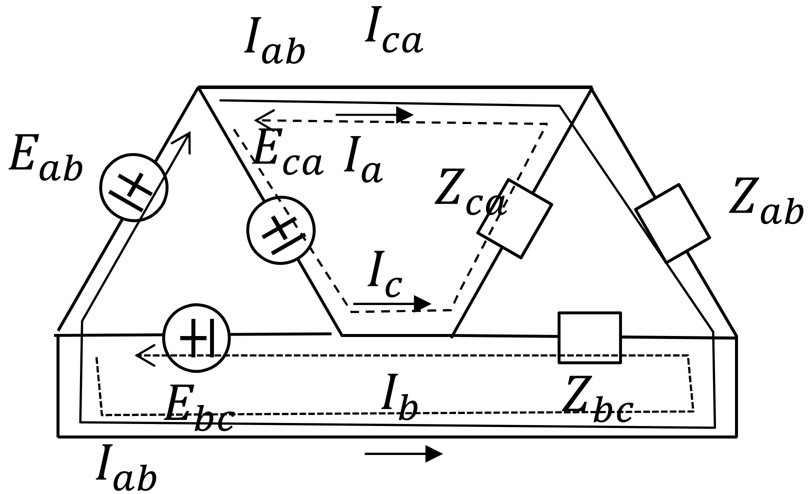
非対称三相交流回路

- Δ形電源，Y形負荷
  - $Z_{11} = Z_a + Z_b$
  - $Z_{22} = Z_b + Z_c$
  - $Z_{33} = Z_c + Z_a$
  - $Z_{12} = Z_{21} = -Z_b$
  - $Z_{13} = Z_{31} = -Z_a$
  - $Z_{23} = Z_{32} = -Z_c$



- $Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 = E_{ab}$
- $Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 = E_{bc}$
- $Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 = E_{ca}$
- $I_a = I_1 - I_3$
- $I_b = I_2 - I_1$
- $I_c = I_3 - I_2$

非対称三相交流回路

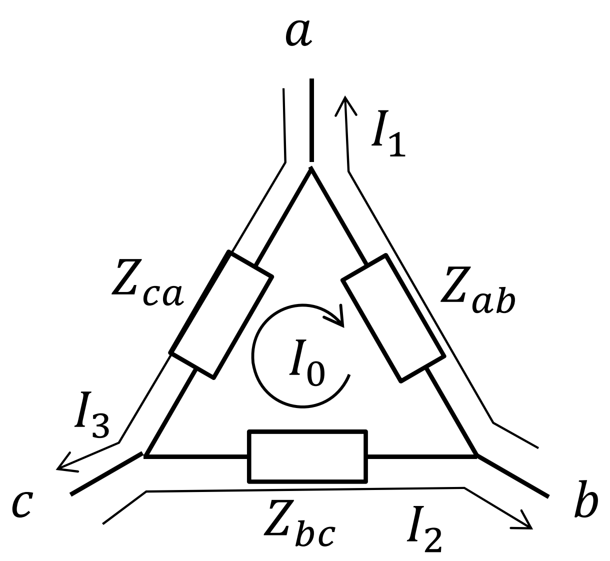


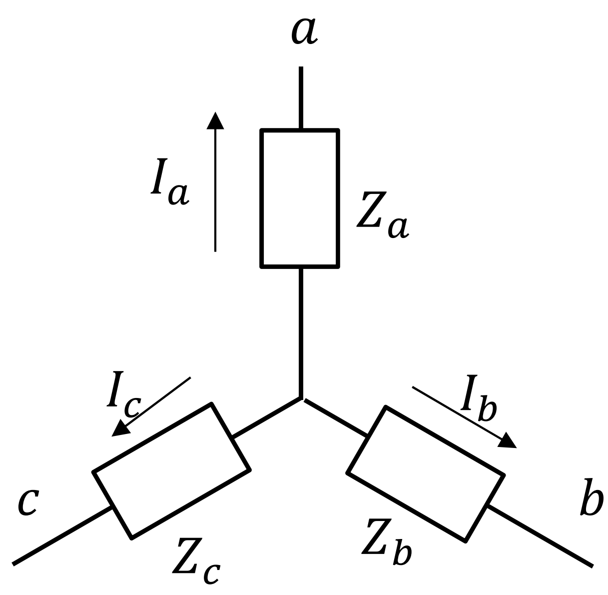
非対称三相交流回路

- Δ形電源，Δ形負荷
  - $Z_{11} = Z_{abg} + Z_{al} + Z_{abL} + Z_{bl}$
  - $Z_{22} = Z_{bcg} + Z_{bl} + Z_{bcL} + Z_{cl}$
  - $Z_{33} = Z_{cag} + Z_{cl} + Z_{abL} + Z_{al}$
  - $Z_{12} = Z_{21} = -Z_{bl}$
  - $Z_{23} = Z_{32} = -Z_{cl}$
  - $Z_{31} = Z_{13} = -Z_{al}$

- $Z_{11}I_{ab} + Z_{12}I_{bl} + Z_{13}I_{ca} = E_{cb}$
- $Z_{21}I_{ab} + Z_{22}I_{bl} + Z_{23}I_{ca} = E_{bc}$
- $Z_{31}I_{ab} + Z_{32}I_{bl} + Z_{33}I_{ca} = E_{ca}$
- $I_a = I_{ab} - I_{ca}$
- $I_b = I_{bc} - I_{ab}$
- $I_c = I_{ca} - I_{bc}$

三相交流回路のΔ-Y変換





三相交流回路のΔ-Y変換

- $I_{ab} = I_1 - I_0$
- $I_{bc} = I_2 - I_0$
- $I_{ca} = I_3 - I_0$
- $V_{ab} = -Z_{ab}(I_1 - I_0) = -Z_a I_a + Z_b I_b$
- $V_{bc} = -Z_{bc}(I_2 - I_0) = -Z_b I_b + Z_c I_c$
- $V_{ca} = -Z_{ca}(I_3 - I_0) = -Z_c I_c + Z_a I_a$
- $V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = -(Z_{ab} I_1 + Z_{bc} I_2 + Z_{ca} I_3) + (Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}) I_0 = 0$
- $I_0 = \frac{Z_{ab} I_1 + Z_{bc} I_2 + Z_{ca} I_3}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$

三相交流回路のΔ-Y変換

- $V_{ab} = -Z_{ab}\left(I_1 - \frac{Z_{ab}I_1 + Z_{bc}I_2 + Z_{ca}I_3}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}\right) = Z_{ab}\frac{Z_{bc}(I_2-I_1)+Z_{ca}(I_3-I_1)}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$
- $V_{bc} = -Z_{bc}\left(I_2 - \frac{Z_{ab}I_1 + Z_{bc}I_2 + Z_{ca}I_3}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}\right) = Z_{bc}\frac{Z_{ab}(I_1-I_2)+Z_{ca}(I_3-I_2)}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$
- $V_{ca} = -Z_{ca}\left(I_3 - \frac{Z_{ab}I_1 + Z_{bc}I_2 + Z_{ca}I_3}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}\right) = Z_{ca}\frac{Z_{ab}(I_1-I_3)+Z_{bc}(I_2-I_3)}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$

三相交流回路のΔ-Y変換

- $I_a = I_1 - I_3$
- $I_b = I_2 - I_1$
- $I_c = I_3 - I_2$
- $V_{ab} = Z_{ab}\frac{Z_{bc}I_b - Z_{ca}I_a}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} = -Z_aI_a + Z_bI_b$
- $V_{bc} = Z_{bc}\frac{-Z_{ab}I_b + Z_{ca}I_c}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} = -Z_bI_b + Z_cI_c$
- $V_{ca} = Z_{ca}\frac{Z_{ab}I_a - Z_{bc}I_c}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} = -Z_cI_c + Z_aI_a$

- 任意のI_a, I_b, I_cについて成り立つためには
- $Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$
- $Z_b = \frac{Z_{bc}Z_{ab}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$
- $Z_c = \frac{Z_{ca}Z_{bc}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$

三相交流回路のΔ-Y変換

- $Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$
- $Y_{bc} = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$
- $Y_{ca} = \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$

- $Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c}$
- $Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a}$
- $Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b}$