

電力システム解析論

第5回 対称座標法

2021年11月2日

対称座標法

- 定義

- 三相交流電圧・電流に対して次式で定義される

- 零相 $\dot{V}_0 = \frac{1}{3}[\dot{V}_a + \dot{V}_b + \dot{V}_c]$ $\dot{I}_0 = \frac{1}{3}[\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c]$

- 正相 $\dot{V}_1 = \frac{1}{3}[\dot{V}_a + \alpha\dot{V}_b + \alpha^2\dot{V}_c]$ $\dot{I}_1 = \frac{1}{3}[\dot{I}_a + \alpha\dot{I}_b + \alpha^2\dot{I}_c]$

- 逆相 $\dot{V}_2 = \frac{1}{3}[\dot{V}_a + \alpha^2\dot{V}_b + \alpha\dot{V}_c]$ $\dot{I}_2 = \frac{1}{3}[\dot{I}_a + \alpha\dot{I}_b + \alpha^2\dot{I}_c]$

但し $\alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi}$ 回転を表す。 $\alpha^3 = e^{j2\pi} = 1$ 1回転

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 1 + e^{j\frac{2}{3}\pi} + e^{j\frac{4}{3}\pi} = 0$$

対称座標法

- 対称座標変換の行列表示

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix}$$

- 対象座標成分から相座標成分への逆変換

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

電流も
同様

検算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

対称座標法

- 各変換の意味

- 対称座標変換

- 零相

$$\dot{V}_a + \dot{V}_b + \dot{V}_c = 3\dot{V}_0$$

- 三相各相成分の和の1/3
 - 各相に共通に含まれる成分

- 正相 $\dot{V}_a + \alpha\dot{V}_b + \alpha^2\dot{V}_c = 3\dot{V}_1$

- 基準としたa相に対して, b,c相の遅れを補償した和の1/3
 - 定常状態では, 反時計回りの成分のみになる

- 逆相 $\dot{V}_a + \alpha^2\dot{V}_b + \alpha\dot{V}_c = 3\dot{V}_2$

- 基準としたa相に対して, b,c相の遅れをさらに追加した和の1/3
 - 定常状態では, 時計回りの成分のみになる

対称座標法

- 各逆変換の意味

- 対称座標逆変換

- a相

$$\dot{V}_a = \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

- 基準相

- 各相に共通に含まれる成分, 正相, 逆相の和

- b相 $\dot{V}_b = \dot{V}_0 + \alpha^2 \dot{V}_1 + \alpha \dot{V}_2$

- a相に対して $\pi/3$ 遅れた正相成分, $\pi/3$ 進んだ逆相成分と共通成分の和(反時計回りを正回転)

- c相

$$\dot{V}_c = \dot{V}_0 + \alpha \dot{V}_1 + \alpha^2 \dot{V}_2$$

- a相に対して $\pi/3$ 遅れた正相成分, $\pi/3$ 進んだ逆相成分と共通成分の和(反時計回りを正回転)

対称座標法

- 三相平衡の場合の各値
 - 各相の電圧・電流
 - 同一振幅
 - B相の位相はa相の $\pi/3$ 遅れ
 - C相の位相はb相の $\pi/3$ 遅れ
 - 各対称成分は

$$\begin{cases} \dot{V}_a = V e^{j\theta} \\ \dot{V}_b = \dot{V}_a e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \alpha^2 \dot{V}_a \\ \dot{V}_c = \dot{V}_b e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \alpha \dot{V}_a \end{cases}$$

- 零相

$$\dot{V}_0 = \frac{1}{3} [\dot{V}_a + \dot{V}_b + \dot{V}_c] = \frac{1}{3} [\dot{V}_a + \alpha^2 \dot{V}_a + \alpha \dot{V}_a] = \frac{1}{3} \dot{V}_a [1 + \alpha^2 + \alpha] = 0$$

- 正相

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{3} [\dot{V}_a + \alpha \dot{V}_b + \alpha^2 \dot{V}_c] = \frac{1}{3} [\dot{V}_a + \alpha^3 \dot{V}_a + \alpha^3 \dot{V}_a] = \frac{1}{3} \dot{V}_a [1 + \alpha^3 + \alpha^3] = \dot{V}_a$$

- 逆相

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{3} [\dot{V}_a + \alpha^2 \dot{V}_b + \alpha \dot{V}_c] = \frac{1}{3} [\dot{V}_a + \alpha^4 \dot{V}_a + \alpha^2 \dot{V}_a] = \frac{1}{3} \dot{V}_a [1 + \alpha^1 + \alpha^2] = 0$$

三相平衡電力回路

- 正弦波について考える

- オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega t + x) = \frac{e^{j(\omega t + x)} - e^{-j(\omega t + x)}}{2j}$$

正弦波は

$$e^{j(\omega t + x)} \quad \text{角速度}\omega\text{逆時計周り}$$

$$e^{-j(\omega t + x)} \quad \text{角速度}\omega\text{時計周り}$$

の成分で構成される

平衡な
三相交流
電圧

$$\left\{ \begin{array}{l} v_a = V \sin(\omega t + \theta) = V \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} \\ v_b = V \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \theta) = V \frac{e^{j(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \theta)} - e^{-j(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \theta)}}{2j} \\ v_c = V \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \theta) = V \frac{e^{j(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \theta)} - e^{-j(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \theta)}}{2j} \end{array} \right.$$

対称座標法

- 対称座標法で三相交流電圧・電流をスカラーで扱ったらどうなるか？

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &= \frac{1}{3} [v_a + v_b + v_c] \\ &= \frac{1}{3} \left[V \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} + V \frac{\alpha^2 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} + V \frac{\alpha e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^2 e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{V}{2j} \left[e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)} + \alpha^2 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha e^{-j(\omega t + \theta)} + \alpha e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^2 e^{-j(\omega t + \theta)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{V}{2j} \left[(1 + \alpha^2 + \alpha) e^{j(\omega t + \theta)} - (1 + \alpha + \alpha^2) e^{-j(\omega t + \theta)} \right] = 0\end{aligned}$$

対称座標法

- 対称座標法で三相交流電圧・電流をスカラーで扱ったらどうなるか？

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \frac{1}{3} \left[\dot{V}_a + \alpha \dot{V}_b + \alpha^2 \dot{V}_c \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[V \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} + \alpha V \frac{\alpha^2 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} + \alpha^2 V \frac{\alpha e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^2 e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{V}{2j} \left[e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)} + \alpha^3 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^2 e^{-j(\omega t + \theta)} + \alpha^3 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^4 e^{-j(\omega t + \theta)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{V}{2j} \left[(1 + \alpha^3 + \alpha^3) e^{j(\omega t + \theta)} - (1 + \alpha^2 + \alpha) e^{-j(\omega t + \theta)} \right] = \frac{V}{2j} e^{j(\omega t + \theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \frac{1}{3} \left[\dot{V}_a + \alpha^2 \dot{V}_b + \alpha \dot{V}_c \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[V \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} + \alpha^2 V \frac{\alpha^2 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} + \alpha V \frac{\alpha e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^2 e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{V}{2j} \left[e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)} + \alpha^4 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^3 e^{-j(\omega t + \theta)} + \alpha^2 e^{j(\omega t + \theta)} - \alpha^3 e^{-j(\omega t + \theta)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{V}{2j} \left[(1 + \alpha^4 + \alpha^2) e^{j(\omega t + \theta)} - (1 + \alpha^3 + \alpha^3) e^{-j(\omega t + \theta)} \right] = -\frac{V}{2j} e^{-j(\omega t + \theta)}\end{aligned}$$

正相分だけでなく、逆相成分もあらわれる。

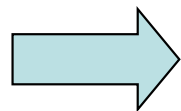
→ 電圧・電流はベクトルで表す必要がある。

三相平衡電力回路

- 理想的な三相平衡時の回路状態
 - 各相の電圧・電流は他相に影響を及ぼさない
- 各相の電流

$$\begin{cases} \dot{I}_a = \dot{V}_a / \dot{Z}_a = V e^{j\theta} / \dot{Z} \\ \dot{I}_b = \dot{V}_b / \dot{Z}_b = V e^{j(\theta - \frac{2}{3}\pi)} / \dot{Z} \\ \dot{I}_c = \dot{V}_c / \dot{Z}_c = V e^{j(\theta + \frac{2}{3}\pi)} / \dot{Z} \end{cases}$$

- 足したら0 → 中性線電流が0
- 各相の電圧・電流は位相が異なるだけで同じ



三相まとめた(代表した)一相で表現可能

三相電力回路

- 実際の送電線

- 相間の相互作用や不平衡を考慮する場合

- 送電線のLを求める

- a相線路の自己インダクタンス

- 帰路a'相(鏡像)とした往路のインダクタンス

$$L_{aa-e} = 0.46 \log_{10} \frac{h_a + H_a}{r} + 0.05 [\text{mH/km}]$$

- 大地の示す復路(鏡像)のインダクタンス

$$L_{a'a'-e} = 0.46 \log_{10} \frac{h_a + H_a}{H_a} + 0.05 [\text{mH/km}]$$

$$L_{aa} = L_{aa-e} + L_{a'a'-e} \cong 0.46 \log_{10} \frac{h_a + H_a}{r} + 0.1 [\text{mH/km}]$$

他相の自己インダクタンスも同様

$$L_{aa} \cong L_{bb} \cong L_{cc}$$

三相電力回路

- 実際の送電線

- 送電線のLを求める

- ab相間の相互インダクタンス

- ab相間の作用インダクタンス

$$L_{ab-ba} = 0.46 \log_{10} \frac{h_{ab}}{r} + 0.05 [\text{mH/km}]$$

- ab相間の相互インダクタンス

$$L_{ab} = L_{aa} - L_{ab-ba} = 0.46 \log_{10} \frac{h_a + H_a}{h_{ab}} + 0.05 [\text{mH/km}]$$

$$L_{ba} = L_{bb} - L_{ab-ba} = 0.46 \log_{10} \frac{h_b + H_b}{h_{ab}} + 0.05 [\text{mH/km}]$$

$$L_{ab} \cong L_{ba}$$

$$L_{ab} \cong L_{bc} \cong L_{ca} \quad \text{他相の相互インダクタンスも同様}$$

三相電力回路

- 三相一回線送電線の回路
 - 回路方程式

$$\begin{cases} V_{1a} - V_{2a} = (R_a + j\omega L_{aa})I_a + j\omega L_{ab}I_b + j\omega L_{ac}I_c \\ V_{1b} - V_{2b} = (R_b + j\omega L_{bb})I_b + j\omega L_{ab}I_a + j\omega L_{bc}I_c \\ V_{1c} - V_{2c} = (R_c + j\omega L_{cc})I_c + j\omega L_{ca}I_a + j\omega L_{bc}I_b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{1b} \\ V_{1c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{2a} \\ V_{2b} \\ V_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + j\omega L_{aa} & j\omega L_{ab} & j\omega L_{ac} \\ j\omega L_{ab} & R_b + j\omega L_{bb} & j\omega L_{bc} \\ j\omega L_{ca} & j\omega L_{bc} & R_c + j\omega L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

三相電力回路

- 三相一回線送電線の回路
 - インピーダンス表示

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{1b} \\ V_{1c} \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} V_{2a} \\ V_{2b} \\ V_{2c} \end{bmatrix} \quad I_a = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + j\omega L_{aa} & j\omega L_{ab} & j\omega L_{ac} \\ j\omega L_{ab} & R_b + j\omega L_{bb} & j\omega L_{bc} \\ j\omega L_{ca} & j\omega L_{bc} & R_c + j\omega L_{cc} \end{bmatrix}$$

$$V_1 - V_2 = ZI$$

三相電力回路

- 三相電力回路の特徴

- 三相のインピーダンスは右式で表される。

$$\begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix}$$

- 相間の相互インダクタンスを考慮する必要がある場合は複雑
- 不平衡となる場合はさらに複雑
- 力技で解けないこともないが・・・
 - 楽したい

- 三相平衡の特徴が利用できないか？

- 変数変換でなんとかしてみよう！
 - そんなに都合のよい変数変換法ってあるんかいな

対称座標法

- 対称座標の利点

- インピーダンス行列の扱い

- 送電線路の場合

- 自己インダクタンス $L_{aa} \cong L_{bb} \cong L_{cc}$
- 相互インダクタンス $L_{ab} \cong L_{ba} \cong L_{bc} \cong L_{cb} \cong L_{ca} \cong L_{ac}$
- 相座標系でのインピーダンス行列 $\dot{Z} = R + j\omega L$

$$\dot{Z}_s \equiv \dot{Z}_{aa} \cong \dot{Z}_{bb} \cong \dot{Z}_{cc}$$

$$\dot{Z}_m \equiv \dot{Z}_{ab} \cong \dot{Z}_{ba} \cong \dot{Z}_{bc} \cong \dot{Z}_{cb} \cong \dot{Z}_{ca} \cong \dot{Z}_{ac}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{aa} & \dot{Z}_{ab} & \dot{Z}_{ac} \\ \dot{Z}_{ba} & \dot{Z}_{bb} & \dot{Z}_{bc} \\ \dot{Z}_{ca} & \dot{Z}_{cb} & \dot{Z}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s & \dot{Z}_m & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{bmatrix}$$

← 密

対称座標法

- インピーダンスの取り扱い
 - 相座標表現

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{aa} & \dot{Z}_{ab} & \dot{Z}_{ac} \\ \dot{Z}_{ba} & \dot{Z}_{bb} & \dot{Z}_{bc} \\ \dot{Z}_{ca} & \dot{Z}_{cb} & \dot{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s & \dot{Z}_m & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix}$$

- 対称座標表現 $\alpha = e^{-j2\pi/3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s & \dot{Z}_m & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

対称座標法

- インピーダンス行列の扱い
 - 送電線路の場合
 - 送電線インピーダンスの対称座標表示

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{00} & \dot{Z}_{01} & \dot{Z}_{02} \\ \dot{Z}_{10} & \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{20} & \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s + 2\dot{Z}_m & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_s - \dot{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_s - \dot{Z}_m \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{疎}$$

- インピーダンスの対称座標成分は対角項のみ
- 零相, 正相, 逆相が互いに干渉しない
- アドミタンスでも同様

対称座標法

- インピーダンス行列の扱い

- 送電線路の場合

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 = \dot{Z}_s + 2\dot{Z}_m \\ \dot{Z}_1 = \dot{Z}_s - \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_2 = \dot{Z}_s - \dot{Z}_m \end{cases} \quad \dot{Z}_0 > \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$$

- 対称分の各相を独立に表現可能

- 零相回路 $\dot{V}_0 = \dot{Z}_0 \dot{I}_0$

- 正相回路 $\dot{V}_1 = \dot{Z}_1 \dot{I}_1$

- 逆相回路 $\dot{V}_2 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2$

- 送電線の回路が簡単に描ける