回路とシステム
第11回
2ポート回路

舟木　剛

2021年12月20日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
    - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
    - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
    - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
    - テブナン・ノートンの定理
    - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
    - 2ポート回路の行列表現
    - 相反2ポート回路
    - 相互接続
    - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
    - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
    - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
    - 平衡三相回路

2ポート回路

- 線形時不変，内部電源を持たない2ポート回路の零状態応答
  - ポート電圧V_1, V_2，　ポート電流I_1, I_2
  - 重ね合わせの理を適用可能
  - 独立変数(x, y)，　従属変数(p, q)
  - $\begin{bmatrix} p(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$
  - インピーダンス行列，アドミタンス行列
  - ハイブリッド行列，伝送行列

2ポート回路

- インピーダンス行列
  - $\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$
- アドミタンス行列
  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$
- ハイブリッド行列
  - $\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$
- 伝送行列
  - $\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}$

2ポート回路
パラメータ変換($\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{H}$行列を$z_{ij}$で表現)

- $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\det\boldsymbol{Z}}$
- $h_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    - $z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = 0 \qquad I_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22}} I_1$
    - $V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = z_{11}I_1 - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}} I_1 = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{22}} I_1$
    - $\frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{22}} = \frac{\det\boldsymbol{Z}}{Z_{22}}$

2ポート回路
パラメータ変換($\boldsymbol{H}$行列をz_{ij}で表現)

- $h_{22} = \left.\dfrac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    - $V_2 = z_{22} I_2$
    - $\dfrac{I_2}{V_2} = \dfrac{1}{z_{22}}$
- $h_{21} = \left.\dfrac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    - $z_{21} I_1 + z_{22} I_2 = 0$
    - $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-Z_{21}}{z_{22}}$

2ポート回路
パラメータ変換($\boldsymbol{H}$行列をz_{ij}で表現)

- $h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    - $V_1 = z_{12} I_2$
    - $V_2 = z_{22} I_2 = z_{22} \frac{1}{z_{12}} V_1$
    - $\frac{V_1}{V_2} = \frac{z_{12}}{z_{22}}$
- $\boldsymbol{H} = \frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{Z} & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$

2ポート回路 パラメータ変換($\boldsymbol{F}$行列をz_{ij}で表現)

- $\frac{1}{A} = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
    - $V_1 = z_{11} I_1$
    - $V_2 = z_{21} I_1 = z_{21} \frac{1}{z_{11}} V_1$
    - $\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$
- $\frac{1}{B} = \frac{-I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    - $z_{21} I_1 + z_{22} I_2 = 0$
    - $I_1 = -\frac{z_{22}}{z_{21}} I_2$
    - $V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = -\frac{z_{11} z_{22}}{z_{21}} I_2 + z_{12} I_2 = \frac{-z_{11} z z_{22} + z_{12} z_{21}}{z_{21}} I_2$
    - $\frac{-I_2}{V_1} = \frac{z_{21}}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} = \frac{Z_{21}}{\mathrm{det}\boldsymbol{Z}}$

2ポート回路
パラメータ変換($\boldsymbol{F}$行列をz_{ij}で表現)

- $\frac{1}{C} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
    - $V_2 = z_{21} I_1$
    - $\frac{V_2}{I_1} = Z_{21}$
- $\frac{1}{D} = \left.\frac{-I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    - $z_{21} I_1 + z_{22} I_2 = 0$
    - $\frac{-I_2}{I_1} = \frac{z_{21}}{z_{22}}$

- $A = \frac{z_{11}}{z_{21}}$
- $B = \frac{\det \boldsymbol{Z}}{Z_{21}}$
- $C = \frac{1}{Z_{21}}$
- $D = \frac{Z_{22}}{z_{21}}$
- $\boldsymbol{F} = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \det \boldsymbol{Z} \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$

2ポート回路
パラメータ変換($\boldsymbol{Z}$行列を$\boldsymbol{F}$行列要素で表現)

- $z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
    - $V_1 = AV_2$
    - $I_1 = CV_2$
    - $V_1 = A\frac{I_1}{C}$
    - $\frac{V_1}{I_1} = \frac{A}{C}$
- $z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
    - $I_1 = CV_2$
    - $\frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{C}$

2ポート回路
パラメータ変換($\boldsymbol{Z}$行列を$\boldsymbol{F}$行列要素で表現)

- $z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$
    - $0 = CV_2 - DI_2$
    - $\frac{V_2}{I_2} = \frac{D}{C}$
- $\boldsymbol{Z} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \det\boldsymbol{F} \\ 1 & D \end{bmatrix}$

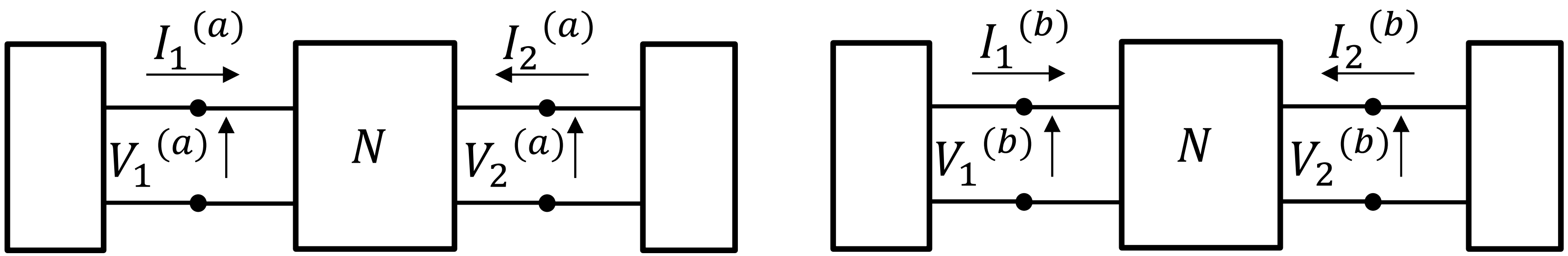
- $z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$
    - $V_1 = AV_2 - BI_2$
    - $0 = CV_2 - DI_2$
    - $V_2 = \frac{D}{C} I_2$
    - $V_1 = A\frac{D}{C} I_2 - BI_2 = \frac{AD-BC}{C} I_2 = \frac{\det\boldsymbol{F}}{C}$

2ポート行列変換表

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Y}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{Z}$	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{\det\boldsymbol{Y}}\begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix} \det\boldsymbol{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{C}\begin{bmatrix} A & \det\boldsymbol{F} \\ 1 & D \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{Y}$	$\dfrac{1}{\det\boldsymbol{Z}}\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{h_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det\boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{B}\begin{bmatrix} D & -\det\boldsymbol{F} \\ -1 & A \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}$	$\dfrac{1}{z_{22}}\begin{bmatrix} \det\boldsymbol{Z} & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{y_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{22} & \det\boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{D}\begin{bmatrix} B & \det\boldsymbol{F} \\ -1 & C \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{F}$	$\dfrac{1}{z_{21}}\begin{bmatrix} z_{11} & \det\boldsymbol{Z} \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{y_{21}}\begin{bmatrix} -y_{22} & -1 \\ \det\boldsymbol{Y} & -y_{11} \end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{h_{21}}\begin{bmatrix} -\det\boldsymbol{H} & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

相反2ポート回路

- 相反条件
  - 異なる条件a, bで動作しているポート電流$\boldsymbol{I}^{(a)}$, $\boldsymbol{I}^{(b)}$とポート電圧$\boldsymbol{V}^{(a)}, \boldsymbol{V}^{(b)}$の積和が一致する
    - $\boldsymbol{I}^{(a)}(s)^T\boldsymbol{V}^{(b)}(s) = \boldsymbol{I}^{(b)}(s)^T\boldsymbol{V}^{(a)}(s)$
    - 内部の電圧・電流に依らない
    - 相反2ポート回路
      - $I_1{}^{(a)}V_1{}^{(b)} + I_2{}^{(a)}V_2{}^{(b)} = I_1{}^{(b)}V_1{}^{(a)} + I_2{}^{(b)}V_2{}^{(a)}$



相反2ポート回路

- 相反2ポート回路のインピーダンス行列$\boldsymbol{Z}$表現
  - $\boldsymbol{I}^{(a)}(s)^T\boldsymbol{Z}(s)\boldsymbol{I}^{(b)}(s)=\boldsymbol{I}^{(b)}(s)^T\boldsymbol{Z}(s)\boldsymbol{I}^{(a)}(s)$
  - ${V_i}^{(b)}=\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_j}^{(b)}$
  - $P=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(a)}{V_i}^{(b)}=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(a)}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_j}^{(b)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_i}^{(a)}{I_j}^{(b)}$
  - ${V_i}^{(a)}=\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}{I_j}^{(a)}$
  - $P=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(b)}{V_i}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(b)}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_j}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_i}^{(b)}{I_j}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ji}{I_i}^{(a)}{I_j}^{(b)}$
  - 任意の$\boldsymbol{I}^{(a)}(s)$, $\boldsymbol{I}^{(b)}(s)$について成り立つ
    - $Z_{ij}=Z_{ji}$ → 対称行列$\boldsymbol{Z}^T=\boldsymbol{Z}$

相反2ポート回路

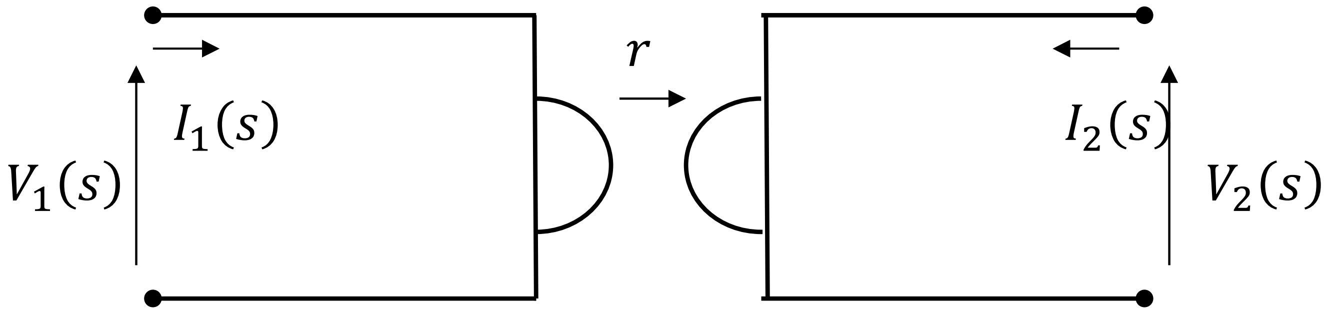
- 必要十分条件
  - $z_{ij} = z_{ji}$ → 伝達インピーダンスが等しい
  - $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$より
    - $y_{12} = y_{21}$ → 伝達アドミタンスが等しい
  - $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \det\mathbf{Z} & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$より
    - $h_{12} = -h_{21}$ → 電圧伝達関数と電流伝達関数が等しい

相反2ポート回路

- 必要十分条件
  - $\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C}\begin{bmatrix} A & \det\boldsymbol{F} \\ 1 & D \end{bmatrix}$より
    - $\det\boldsymbol{F} = AD - BC = 1$
- 線形時不変RLC回路のテレゲン定理
  - テレゲン定理:各枝電流と枝電圧の積の総和が0になる。$\sum_{i=1}^{N} V_i I_i$
  - $I_1{}^{(a)}V_1{}^{(b)} + I_2{}^{(a)}V_2{}^{(b)} = \sum_{\text{内部枝}} I_k{}^{(a)}V_k{}^{(b)} = \sum_{\text{内部枝}} I_k{}^{(a)}Z_k I_k{}^{(b)} = \sum_{\text{内部枝}} V_k{}^{(a)}I_k{}^{(b)} = V_1{}^{(a)}I_1{}^{(b)} + V_2{}^{(a)}I_2{}^{(b)}$

非相反回路

- ジャイレータ
  - インピーダンスを反転させる回路
  - $V_1 = -rI_2 \quad V_2 = rI_1$
  - $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$



等価回路表現