回路とシステム
第14回
状態方程式
三相回路

舟木　剛

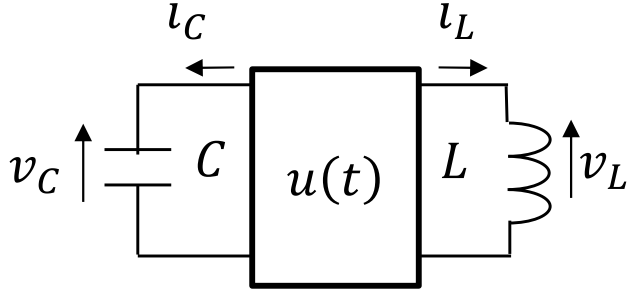
2022年1月24日2限

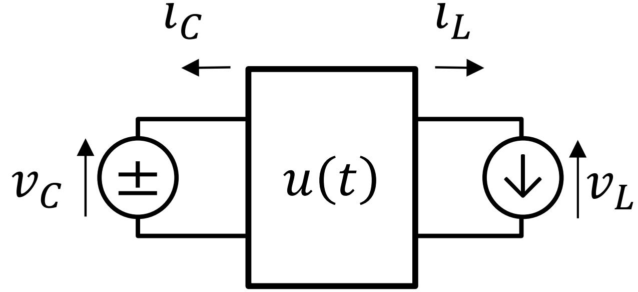
講義計画

- 回路方程式 1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路 3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路 4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析 2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流 1回
  - 平衡三相回路

状態方程式

- 抵抗と独立電源から成る回路$u(t)$に接続されたコンデンサ・リアクトルの電圧・電流応答
  - $C\frac{dv_C(t)}{dt}=i_C(t)$
  - $L\frac{di_L(t)}{dt}=v_L(t)$
- 状態方程式を求めるための等価回路
  - 代入定理の適用
    - コンデンサを独立電圧源v_C
    - リアクトルを独立電流源i_L



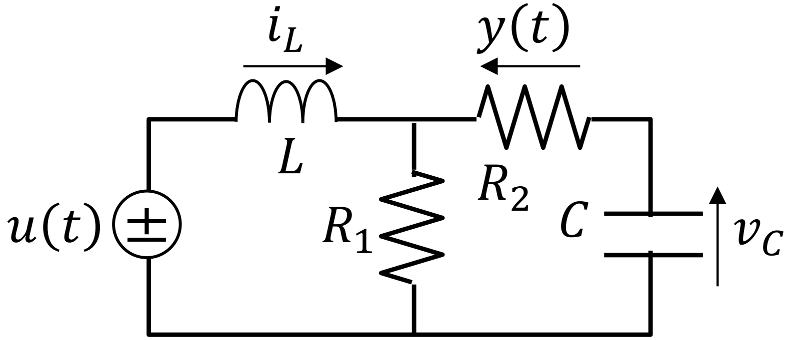


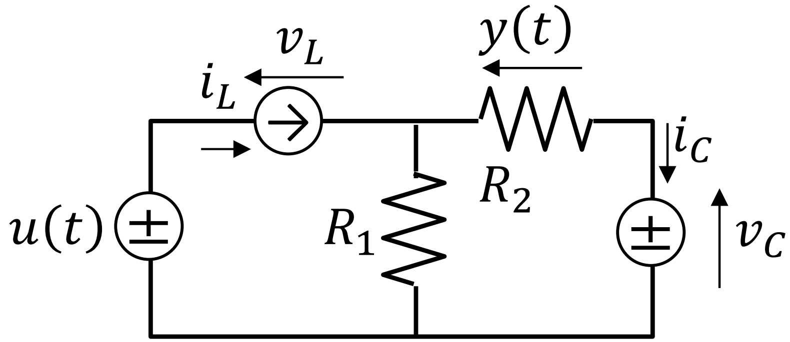
状態方程式

- 外部電源v_C, i_Lと内部電源uにより決まるi_C, v_Lを重ね合わせの理で表す
  - $\begin{cases} i_C(t) = a'_{11} v_C(t) + a'_{12} i_L(t) + \ b'_1 u(t) \\ v_L(t) = a'_{21} v_C(t) + a'_{22} i_L(t) + \ b'_2 u(t) \end{cases}$
  - $\begin{cases} C \dfrac{dv_C(t)}{dt} = a'_{11} v_C(t) + a'_{12} i_L(t) + \ b'_1 u(t) \\ L \dfrac{di_L(t)}{dt} = a'_{21} v_C(t) + a'_{22} i_L(t) + \ b'_2 u(t) \end{cases}$
  - $\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{a'_{11}}{C} v_C(t) + \dfrac{a'_{12}}{C} i_L(t) + \dfrac{b'_1}{C} u(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{a'_{21}}{L} v_C(t) + \dfrac{a'_{22}}{L} i_L(t) + \dfrac{b'_2}{L} u(t) \end{cases}$

状態方程式例題

- 例題
  - KVL
    - $-u + v_L + R_1(i_L - i_C) = 0$
    - $R_2 i_C + v_C - R_1(i_L - i_C) = 0$
  - 動特性
    - $v_L = L\frac{di_L}{dt}$
    - $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$
  - 状態方程式
    - $\begin{cases} -u + L\frac{di_L}{dt} + R_1\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0 \\ R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C - R_1\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0 \end{cases}$
  - 出力方程式
    - $y = R_2 i_C$





状態方程式例題

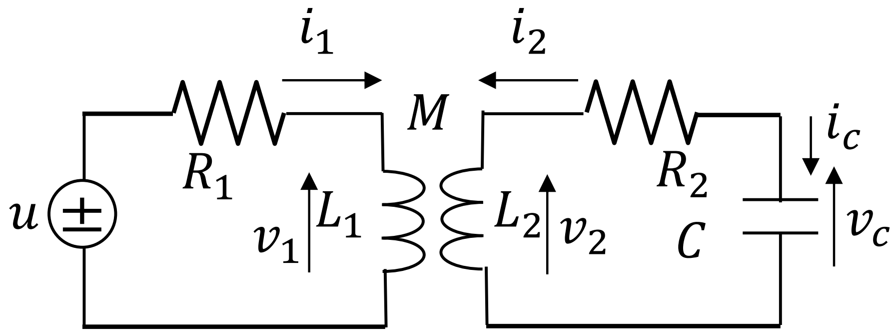
- $\begin{cases} L\frac{di_L}{dt} - R_1 C\frac{dv_C}{dt} = -R_1 i_L + u \\ (R_1+R_2)C\frac{dv_C}{dt} = R_1 i_L - v_C \end{cases}$
- $\begin{bmatrix} L & -R_1C \\ 0 & (R_1+R_2)C \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} L & -R_1C \\ 0 & (R_1+R_2)C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} (R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} (R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix} =$
$\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} -R_1(R_1+R_2)C + {R_1}^2C & -R_1C \\ R_1L & -L \end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} -R_1R_2C & -R_1C \\ R_1L & -L \end{bmatrix} =$
$\frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}$

状態方程式例題

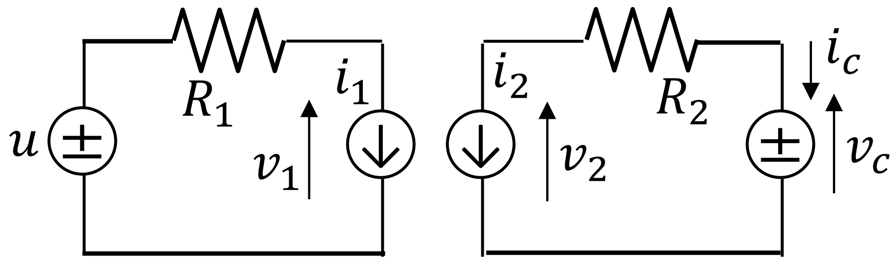
- $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix}(R_1+R_2)C & R_1C\\ 0 & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix}(R_1+R_2)Cu\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{u}{L}\\ 0\end{bmatrix}$
- $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}=\frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}-\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L}\\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{u}{L}\\ 0\end{bmatrix}$
- 出力方程式
  - $y=R_2i_C=R_2C\frac{dv_C}{dt}=\frac{R_2C}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}\frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}R_1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_C\end{bmatrix}$

状態方程式例題

- 結合インダクタを含む回路
  - 状態変数
    - i_1, i_2, v_C
  - 結合インダクタの電圧・電流
    - $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
  - KVL
    - $v_1 = u - R_1 i_1$
    - $v_2 = v_c - R_2 i_2$
  - コンデンサ
    - $C \frac{d}{dt} v_c = i_c = -i_2$
  - 状態方程式
    - $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix}$



等価回路



状態方程式例題

- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\left\{\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 \\ MR_1 & -L_1R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} uL_2 & -Mv_c \\ -Mu & L_1v_c \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\left\{\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 & -M \\ MR_1 & -L_1R_2 & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ -M \end{bmatrix}u\right\}$$
- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-L_2R_1}{L_1L_2-M^2} & \frac{MR_2}{L_1L_2-M^2} & \frac{-M}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{MR_1}{L_1L_2-M^2} & \frac{-L_1R_2}{L_1L_2-M^2} & \frac{L_1}{L_1L_2-M^2} \\ 0 & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{-M}{L_1L_2-M^2} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

状態方程式の解

- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　$\boldsymbol{A}: n \times n, \boldsymbol{B}: n \times m$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$　　$\boldsymbol{C}: p \times n, \boldsymbol{D}: p \times m$
- 行列表現
  - $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$
  - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

- 行列表現
  - $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}(0^-)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$
    $$=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$$
    - 零入力応答$\boldsymbol{U}(s)=0$　$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$
    - 零状態応答$\boldsymbol{x}(0^-)=0$　$[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

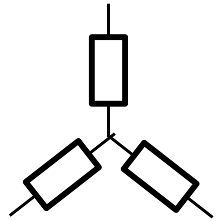
- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　　$\boldsymbol{A}: n \times n$, $\boldsymbol{B}: n \times m$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$　　　$\boldsymbol{C}: p \times n$, $\boldsymbol{D}: p \times m$
  - 状態変数:$\boldsymbol{x}(t)$
  - 入力変数:$\boldsymbol{u}(t)$
  - 出力変数:$\boldsymbol{y}(t)$
- 行列表現
  - $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s)$
  - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

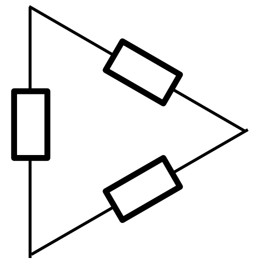
多相交流回路

- 複数の交流電源が回路に同時に存在
  - n個存在→n 相式
  - 周波数が同じ
  - 位相が異なる
  - その他の条件
    - 対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが等しく，位相差が等間隔
    - 非対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが一致しない，または位相差が等間隔でない

多相交流の結合方式

- 独立多相方式　各相が結合されていない
- 結合多相方式　各相が結合されている
  - 平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が一定
  - 不平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が脈動する
  - 星形結線　各相の終端が共通
    - 三相Y結線
  - 環状結線　各相の終端を次相の始端に接続
    - 三相Δ結線





対称多相交流

- 対称n相交流の起電力の瞬時値
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)$
  - $e_n = E_m \sin\left(\omega t - \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)$
    - E_m:振幅
    - ω:角周波数
    - $\frac{2\pi}{n}$:位相差
- ベクトル表記
  - $E_a = E$
  - $E_b = Ee^{-j\frac{2\pi}{n}} = E\left(\cos\frac{2\pi}{n} - j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$
  - $E_n = Ee^{-j\frac{n-1}{n}2\pi} = E\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi - j\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right)$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}$
    - $E_a = E$
    - $E_b = a^{-1}E$
    - $E_n = a^{-(n-1)}E$