

# 電力システム解析論

第6回 系統のインピーダンス・  
アドミタンス行列

2022年12月5日

# 対称座標法

- インピーダンスの取り扱い
  - 相座標表現

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{aa} & \dot{Z}_{ab} & \dot{Z}_{ac} \\ \dot{Z}_{ba} & \dot{Z}_{bb} & \dot{Z}_{bc} \\ \dot{Z}_{ca} & \dot{Z}_{cb} & \dot{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s & \dot{Z}_m & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix}$$

- 対称座標表現

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{00} & \dot{Z}_{01} & \dot{Z}_{02} \\ \dot{Z}_{10} & \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{20} & \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s + 2\dot{Z}_m & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_s - \dot{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_s - \dot{Z}_m \end{bmatrix}$$

# 対称座標法

- インピーダンス行列の扱い

- 送電線路の場合

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 = \dot{Z}_s + 2\dot{Z}_m \\ \dot{Z}_1 = \dot{Z}_s - \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_2 = \dot{Z}_s - \dot{Z}_m \end{cases} \quad \dot{Z}_0 > \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$$

- 対称分の各相を独立に表現可能

- 零相回路  $\dot{V}_0 = \dot{Z}_0 \dot{I}_0$

- 正相回路  $\dot{V}_1 = \dot{Z}_1 \dot{I}_1$

- 逆相回路  $\dot{V}_2 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2$

- 送電線の回路が簡単に描ける

# 三相電力回路

- 架空地線を含む三相一回線送電線の回路
  - 回路方程式

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{1b} \\ V_{1c} \\ V_{1gw} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{2a} \\ V_{2b} \\ V_{2c} \\ V_{2gw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{agw} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bgw} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cgw} \\ Z_{gwa} & Z_{gwb} & Z_{gwc} & Z_{gwgw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_{gw} \end{bmatrix}$$

$$V_{1gw} = V_{2gw} = 0 \quad \text{より}$$

$$I_{gw} = -\frac{Z_{gwa}I_a + Z_{gwb}I_b + Z_{gwc}I_c}{Z_{gwgw}}$$

# 三相電力回路

- 架空地線を含む三相一回線送電線の回路
  - 回路方程式

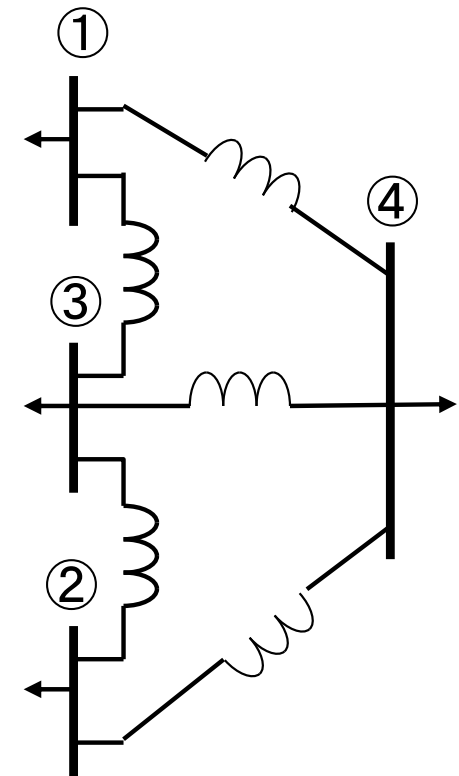
$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{1b} \\ V_{1c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{2a} \\ V_{2b} \\ V_{2c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{agw} \\ Z_{bgw} \\ Z_{cgw} \end{bmatrix} I_{gw} \\
 &= \begin{bmatrix} Z_{aa} - \frac{Z_{agw}Z_{gwa}}{Z_{gwgw}} & Z_{ab} - \frac{Z_{agw}Z_{gwb}}{Z_{gwgw}} & Z_{ac} - \frac{Z_{agw}Z_{gwc}}{Z_{gwgw}} \\ Z_{ba} - \frac{Z_{bgw}Z_{gwa}}{Z_{gwgw}} & Z_{bb} - \frac{Z_{bgw}Z_{gwb}}{Z_{gwgw}} & Z_{bc} - \frac{Z_{bgw}Z_{gwc}}{Z_{gwgw}} \\ Z_{ca} - \frac{Z_{cgw}Z_{gwa}}{Z_{gwgw}} & Z_{cb} - \frac{Z_{cgw}Z_{gwb}}{Z_{gwgw}} & Z_{cc} - \frac{Z_{cgw}Z_{gwc}}{Z_{gwgw}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Z'_{aa} & Z'_{ab} & Z'_{ac} \\ Z'_{ba} & Z'_{bb} & Z'_{bc} \\ Z'_{ca} & Z'_{cb} & Z'_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

三相平衡ならば正相分のみ抽出

# 潮流計算

- 潮流計算とは
  - 発電機母線, 送電線, 負荷母線における
    - 電圧・電流の振幅位相
    - 有効電力・無効電力を求める
- 潮流計算の目的
  - 電力系統の運転状態を知る
  - 電力系統の運用計画を立てる

正相分で考える



電力系統図

# 潮流計算に用いるデータ

- 線路データ

- アドミタンス行列

- 自己アドミタンス
    - 相互アドミタンス

- インピーダンス行列

- 駆動点インピーダンス
    - 伝達インピーダンス
    - 単線結線図からアドミタンスを求めるほうが容易

- その他必要な情報

- 変圧器の定格, 変圧比・インピーダンス・タップ比
    - 力率改善用コンデンサ

$$[I] = [Y][V]$$

# 系統計算

- 系統の計算=回路計算

- 起電力 $E_g$ , 内部インピーダンス $Z_g$ , 負荷電流 $I_L$ , 負荷電圧 $V_L$

$$V_L = E_g - I_L Z_g$$

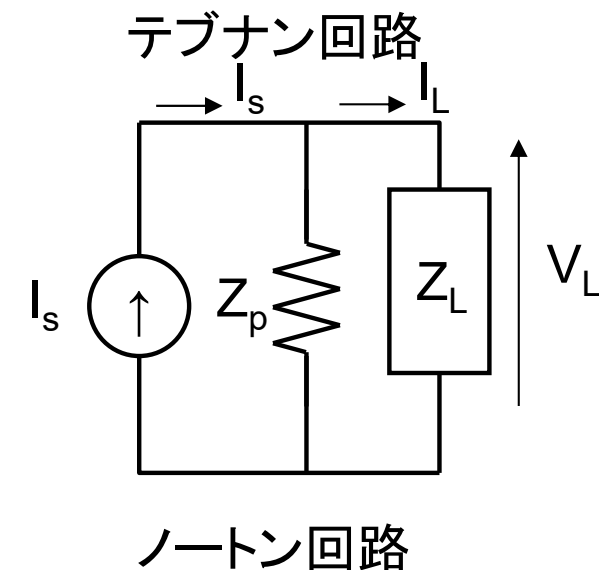
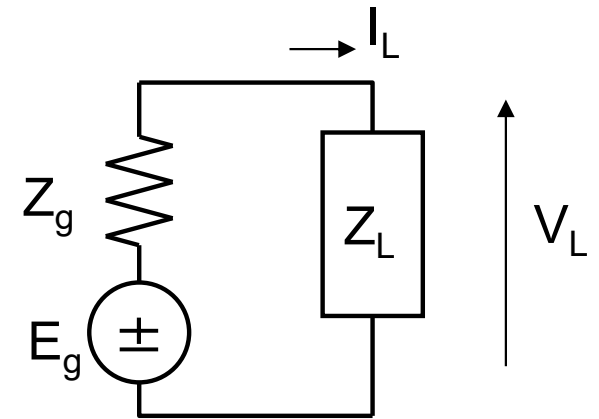
- 電源の電圧源 $\leftrightarrow$ 電流源変換

- 内部抵抗 $Z_p$ , 電流源 $I_g$ ,

$$E_g = I_s Z_p \quad Z_g = Z_p$$

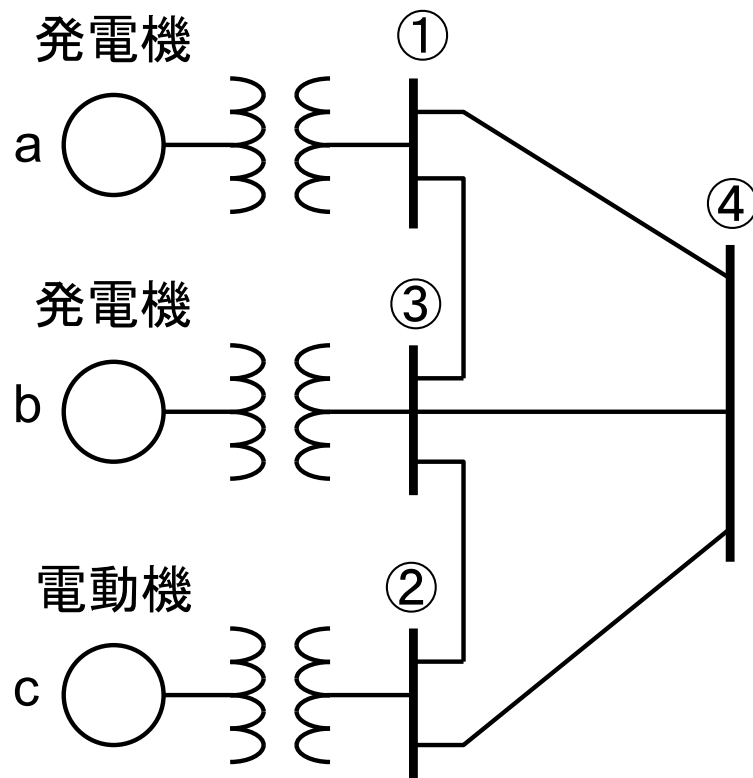
- 負荷電圧が等しければ電源及びインピーダンスは等価に表される

$$V_L = (I_s - I_L) Z_p = I_s Z_p - I_L Z_p$$

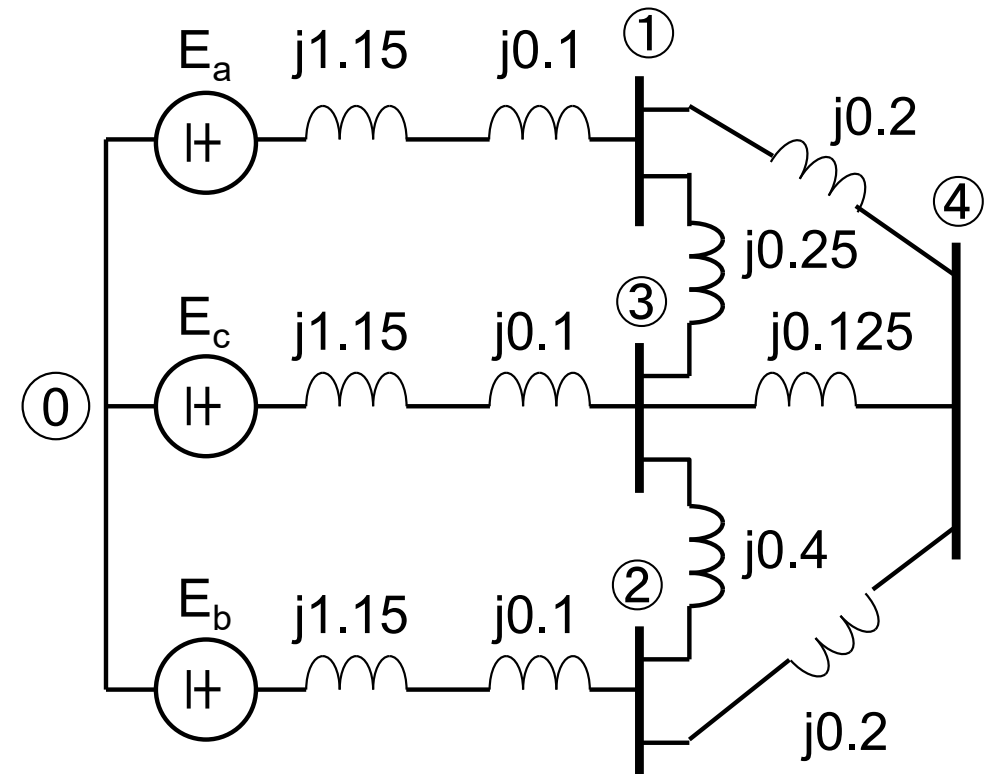




# 系統の節点方程式

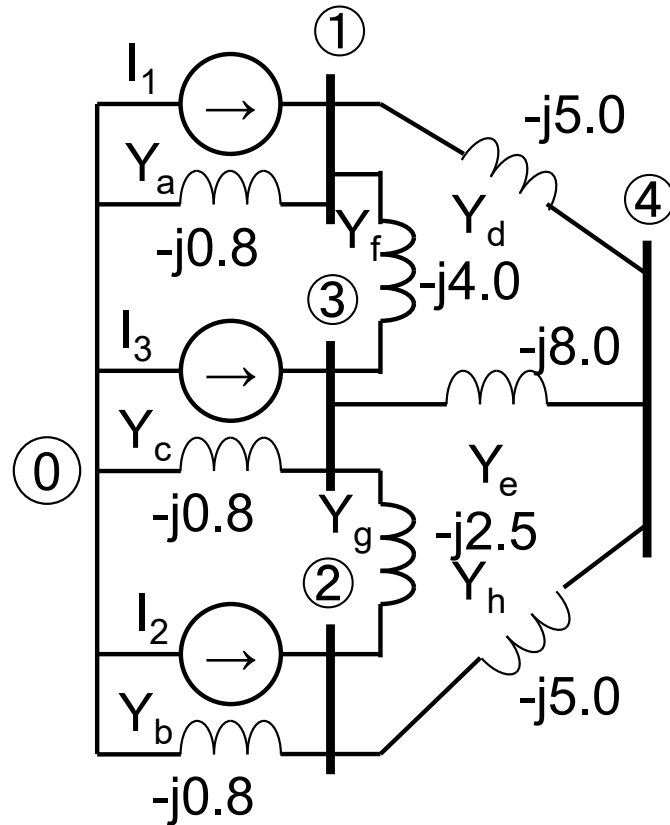


電力系統の単線結線図



電力系統のリアクタンス表現の結線図  
(pu表示)

# 系統の節点方程式



電力系統のアドミタンス表現の結線図  
(pu表示)

節点1のKCL

$$I_1 = V_1 Y_a + (V_1 - V_3) Y_f + (V_1 - V_4) Y_d$$

節点2のKCL

$$I_2 = V_2 Y_b + (V_2 - V_3) Y_g + (V_2 - V_4) Y_h$$

節点3のKCL

$$I_3 = V_3 Y_c + (V_3 - V_2) Y_g + (V_3 - V_1) Y_f + (V_3 - V_4) Y_e$$

節点4のKCL

$$0 = (V_4 - V_1) Y_d + (V_4 - V_2) Y_h + (V_4 - V_3) Y_e$$

# 系統の節点方程式

$$I_1 = (Y_a + Y_f + Y_d)V_1 - Y_fV_3 - Y_dV_4$$

$$I_2 = (Y_b + Y_g + Y_h)V_2 - Y_gV_3 - Y_hV_4$$

$$I_3 = -Y_fV_1 - Y_gV_2 + (Y_c + Y_e + Y_f + Y_g)V_3 - Y_eV_4$$

$$0 = -Y_dV_1 - Y_hV_2 - Y_eV_3 + (Y_d + Y_e + Y_h)V_4$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$Y_{ii}$  自己アドミタンス  
その節点に接続された  
アドミタンスの総和

$Y_{ij}$  相互アドミタンス( $i \neq j$ )  
二節点間のアドミタンス  
の負値

何もつながっていないノード( $I_i=0$ )を省略することを考える

# 母線のインピーダンス行列と アドミタンス行列

- アドミタンス行列 $Y_{bus}$ とインピーダンス行列 $Z_{bus}$ の関係

$$Z_{bus} = Y_{bus}^{-1}$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

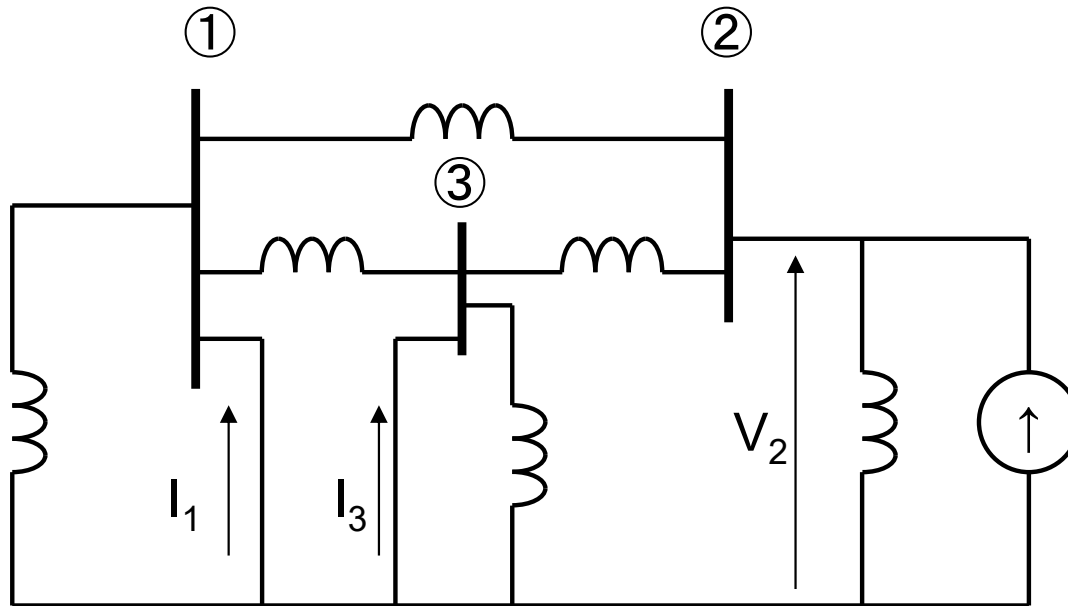
$Z_{ii}$  駆動点インピーダンス

$Z_{ij}$  伝達インピーダンス( $i \neq j$ )

アドミタンス行列 $Y_{bus}$ が対称なので  
インピーダンス行列も対称

# アドミタンス行列の作り方

重ね合わせの理



アドミタンス  $Y_{22}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{32}$  決定用回路

$$I = Y_{bus} V$$

ノード②

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3$$

自己アドミタンス  $Y_{22}$  は、  
節点①, ③を接地して求める

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=V_3=0}$$

ノード①

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3$$

相互アドミタンス  $Y_{12}$  は、  
節点①, ③を接地して求める

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=V_3=0}$$

# インピーダンス行列の作り方

重ね合わせの理

$$V = Z_{bus} I$$

ノード②

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3$$

駆動点インピーダンス $Z_{22}$ は、節点①、③の電流源を開放して求める

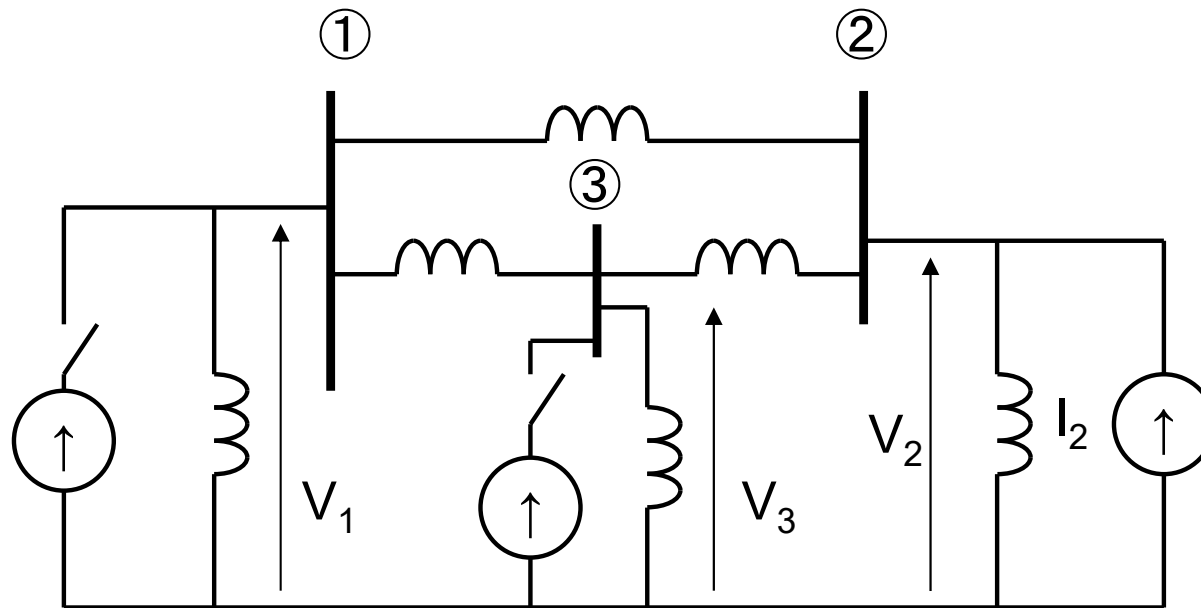
$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=I_3=0}$$

ノード①

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3$$

伝達インピーダンス $Z_{12}$ は、節点①、③の電流源を開放して求める

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=I_3=0}$$



アドミタンス $Z_{22}$ ,  $Z_{12}$ は、 $Z_{32}$ 決定用回路

# 行列の分割

$$C = AB$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ J \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \quad J = b_{31}$$

$$F = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad G = a_{33}$$

# 行列の分割

$$C = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = AB = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DH + EJ \\ FH + GJ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M &= DH + EJ \\ &= DH - EG^{-1}FH \\ &= \left[ D - EG^{-1}F \right] H \end{aligned}$$

$$N = 0 = FH + GJ$$

$$GJ = -FH$$

$$J = -G^{-1}FH$$



# 系統の縮約

$$I = Y_{bus} V$$

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_x \end{bmatrix}$$

$$I_A = KV_A + LV_x$$

$$I_x = L^T V_A + MV_x$$

$I_x$  要素が全て0の場合, この母線を縮約することができる

$$I_x = 0 = L^T V_A + MV_x$$

$$V_x = -M^{-1} L^T V_A$$

$$I_A = KV_A + LV_x$$

$$= KV_A - LM^{-1} L^T V_A$$

# インピーダンス行列のいじり方

- 母線数の増やし方
  - 他の母線に繋がっていない母線の場合

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \hline V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & Z_{bus} & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & Z_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \hline I_p \end{bmatrix}$$

新しい母線pができて  
他は変わらない

# インピーダンス行列のいじり方

- 母線数の増やし方
  - 既存の母線に繋がった母線の場合
    - 母線pを増設
    - 母線pは母線kに繋がる

$$V_{k(new)} = V_{k(orig)} + V_{k(new)} Z_{kk}$$

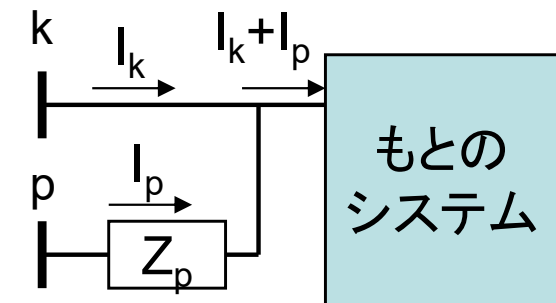
$$V_p = V_{k(orig)} + I_p Z_{kk} + I_p Z_p$$

$$V_p = \underbrace{I_1 Z_{k1} + I_2 Z_{k2} \cdots I_n Z_{kn}}_{V_{k(orig)}} + I_p (Z_{kk} + Z_p)$$

# インピーダンス行列のいじり方

- 母線数の増やし方
  - 既存の母線に繋がった母線の場合

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline Z_{k1} & Z_{k2} & \cdots & Z_{kn} & Z_{kk} + Z_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ I_p \end{bmatrix}$$



最後の行・列が変わる

# インピーダンス行列のいじり方

- 母線数の増やし方

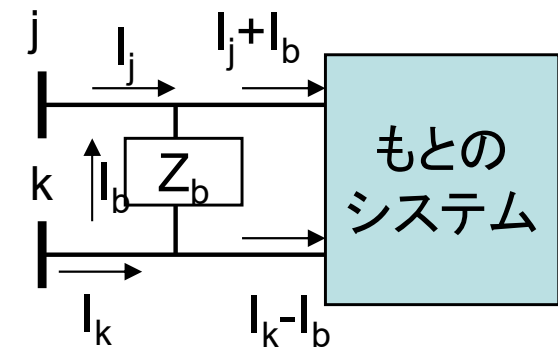
- 既存の母線(j-k)間にインピーダンス $Z_b$ を付加

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + \dots + Z_{1j}(I_j + I_b) + Z_{1k}(I_k - I_b) + \dots \\ &= Z_{11}I_1 + \dots + Z_{1j}I_j + Z_{1k}I_k + \dots + I_b(Z_{1j} - Z_{1k}) \end{aligned}$$

同様に

$$V_j = Z_{j1}I_1 + \dots + Z_{jj}I_j + Z_{jk}I_k + \dots + I_b(Z_{jj} - Z_{jk})$$

$$V_k = Z_{k1}I_1 + \dots + Z_{kj}I_j + Z_{kk}I_k + \dots + I_b(Z_{kj} - Z_{kk})$$



インピーダンスに流れる電流と電位差の関係

$$V_k - V_j = I_b Z_b$$

# インピーダンス行列のいじり方

- 母線数の増やし方

- 既存の母線(j-k)間にインピーダンス $Z_b$ を付加

$$\begin{aligned} 0 &= I_b Z_b - V_k + V_j \\ &= I_b Z_b - \left[ Z_{k1} I_1 + \cdots + Z_{kj} I_j + Z_{kk} I_k + \cdots + I_b (Z_{kj} - Z_{kk}) \right] \\ &\quad + \left[ Z_{j1} I_1 + \cdots + Z_{jj} I_j + Z_{jk} I_k + \cdots + I_b (Z_{jj} - Z_{jk}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (Z_{j1} - Z_{k1}) I_1 + \cdots + (Z_{jj} - Z_{kj}) I_j + (Z_{jk} - Z_{kk}) I_k \\ &\quad + \left[ (Z_{jj} - Z_{jk}) - (Z_{kj} - Z_{kk}) + Z_b \right] I_b \\ &= (Z_{j1} - Z_{k1}) I_1 + \cdots + (Z_{jj} - Z_{kj}) I_j + (Z_{jk} - Z_{kk}) I_k \\ &\quad + (Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk} + Z_b) I_b \end{aligned}$$



# 潮流計算

- 電力系統の各点における電圧・電流・電力・力率等の状態量を求める
- 負荷の増大, 発電所や送電線の新設等の電力系統の設備計画に不可欠
- 電力系統運用において, 将来的に生じる問題を明らかにする
- 電子計算機の無かったころは, 直流計算盤・交流計算盤を用いてアナログ的に算出



# 潮流計算

- 線路条件・状態変数

- 4母線系統

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} & \dot{Y}_{14} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} & \dot{Y}_{24} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} & \dot{Y}_{34} \\ \dot{Y}_{41} & \dot{Y}_{42} & \dot{Y}_{43} & \dot{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}$$

- 潮流条件

- 発電機母線→PV指定

- 負荷母線→PQ指定

- 無限大母線→V指定(位相基準  $\angle 0\text{deg}$ )

# ガウスザイデル法1

- 4母線系統で考える
  - 母線1をスイング母線
    - 計算を母線2から開始する
      - 母線2がP,Q指定母線の場合(Qは遅れが正)

$$\dot{V}_2 \overline{\dot{I}_2} = P_2 + jQ_2$$

- 母線電流

$$\dot{I}_2 = \frac{P_2 - jQ_2}{\overline{\dot{V}_2}}$$

# ガウスザイデル法2

- アドミタンス行列の関係

$$\dot{I}_2 = \dot{Y}_{21}\dot{V}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{V}_2 + \dot{Y}_{23}\dot{V}_3 + \dot{Y}_{24}\dot{V}_4$$

- 代入

$$\frac{P_2 - jQ_2}{\overline{V}_2} = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4$$

- 母線2の電圧

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[ \frac{P_2 - jQ_2}{\overline{V}_2} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3 - Y_{24}V_4 \right]$$

- 繰り返し計算において, 前回の電圧  $\overline{V}_2$  を用いて新たな電圧  $V_2$  を求める
- 修正した  $V_2$  を用いてもう一度計算する手順が一般的

# ガウスザイデル法3

- 修正した全母線電圧を用いて, 次の計算ステップに進む
- 求めた電圧をそのまま次の計算ステップに用いる
  - ガウス法
- 求めた電圧でもう一度電圧を計算し押し, 次の計算ステップに進む
  - ガウスザイデル法
- 初期の設定値が解から離れていると, 欲しい解に収束しないことがある
- 必要な繰り返し数が多い
  - 電圧の修正に加速係数を掛ける

# ガウスザイデル法

- N母線系統

- P,Q指定母線

- 母線kの電圧

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{\overline{V}_k} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N Y_{kn} V_n \right]$$

- P,V指定母線

- 初期値に対して, 母線kの無効電力 $Q_k$ を求める

$$P_k - jQ_k = \overline{V}_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n$$

- $P_k$ は指定値

- $Q_k$ について考える

$$Q_k = -\text{Im} \left[ \overline{V}_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \right]$$

# ガウスザイデル法

- P,V指定母線

- 母線kの電圧を算出

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[ \frac{P_k - jQ_k}{V_k} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N Y_{kn} V_n \right]$$

- Pkは指定値, Qkは求めた値

- 指定したVkの振幅に合うように複素量のVkを縮小

- 縮小率 $\alpha$

$$\alpha = \frac{V_{k\text{指定値}}}{|\dot{V}_{k\text{計算値}}|}$$

$$\dot{V}_{k\text{計算値(新)}} = \alpha \dot{V}_{k\text{計算値}}$$