

回路とシステム
第二回 回路方程式
節点方程式と閉路方程式

舟木 剛

2022年10月17日2限

講義計画

- 回路方程式 1回
 - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
 - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
 - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回
 - テブナン・ノートンの定理
 - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回
 - 2ポート回路の行列表現
 - 相反2ポート回路
 - 相互接続
 - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、 π 形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回
 - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
 - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
 - 平衡三相回路

回路方程式

- 節点:回路素子の接続点
 - 始点:素子に入る, 終点:素子から出る
- 枝:回路素子等の節点間をつなぐもの
- 閉路:枝をつないで電流が流れる経路がある状態
 - 閉路が形成されないと回路として機能しない
- 木:閉路を形成しない最大の枝の集合
 - 全ての節点を含む
 - 組み合わせは複数ある
- 補木:木に含まれない枝の集合
 - 木に補木を付加すると閉路が形成される

節点変換まとめ

- 素子数 m 個, 節点数 n 個の回路
 - $v(t)$:素子電圧ベクトル, $i(t)$:素子電流ベクトル
- 節点方程式
 - $A_r \Psi A_r^T \mathbf{u}(t) + A_r \mathbf{j}(t) = 0$
 - KCL方程式 $n - 1$ 個より導出
 - $\mathbf{u}(t)$:節点電位ベクトル, $\mathbf{j}(t)$:電流源ベクトル
 - Ψ :電圧制御型の特性格行列(対角行列)
 - A_r :既約接続行列 ← 基準節点
 - $\mathbf{v}(t) = A_r^T \mathbf{u}(t)$
 - $\mathbf{i}(t) = \Psi \mathbf{v}(t) + \mathbf{j}(t)$

閉路変換

- n 個の節点, m 個の枝に対する木 T , 補木 T' を考える
 - 補木 T' による基本閉路 $m - n + 1$ 個
 - 基準節点 0 に対する既約接続行列 A_r
 - $A_r = [A_c | A_t]$
 - A_c :補木 T' , A_t :木 T に対応する A_r の部分行列
 - 基本閉路行列 B_f
 - $B_f = [I | B_t]$
 - 列を A_r にそろえる。
 - I :補木 T' , B_t :木 T に対応する B_f の部分行列

閉路変換

- 補木 T' の枝 k
 - 素子電流 i_k
 - 枝 k でできる基本閉路 L_k
 - 素子電流 i_k は基本閉路 L_k の閉路電流となる
 - A_r の列に対応した枝電流 $i^T = [i_c i_t]^T$
- $$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{B}_t^T \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_t^T \end{bmatrix} \mathbf{i}_c = [\mathbf{I}, \mathbf{B}_t]^T \mathbf{i}_c = \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_c$$
 - 補木 T' の $m - n + 1$ 個の基本閉路電流が求まれば, 回路中の m 個の素子電流が全て閉路変換により求まる

閉路変換

- 接続行列 A , 閉路行列 B の列の順序の対応
 $AB^T = 0$
 - A の p 行 $\mathbf{a}_p = [a_{p1} \quad a_{p2} \quad \cdots \quad a_{pn}]$
 - B^T の r 列 = B の r 行 $\mathbf{b}_r = [b_{r1} \quad b_{r2} \quad \cdots \quad b_{rn}]$
 - AB^T の (p, r) 要素 $a_p b_r^T = \sum_{k=1}^n a_{pk} b_{rk}$
 - A の p 行に対応する節点 p が, B の r 行に対応する閉路 r にない場合 $b_{rk} = 0$
 - $a_p b_r^T = 0$

閉路変換

- A の p 行に対応する節点 p が, B の r 行に対応する閉路 r にある場合
 - 節点 p に接続され, 閉路 r 上にある枝は2個存在 k_1, k_2
 - 枝 k_1, k_2 が閉路 r 上で同じ向き
 - $a_{pk_1} = -a_{pk_2}$ $b_{rk_1} = b_{rk_2}$
 - 枝 k_1, k_2 が閉路 r 上で逆向き
 - $a_{pk_1} = a_{pk_2}$ $b_{rk_1} = -b_{rk_2}$
 - $a_p b_r^T = a_{pk_1} b_{rk_1} + a_{pk_2} b_{rk_2} = 0$

閉路変換

- $A_r B_f^T = [A_c A_t][IB_t]^T = A_c + A_t B_t^T = 0$

- $A_t B_t^T = -A_c \quad B_t^T = -A_t^{-1} A_c$

- 電流ベクトル i を A_r にそろえる

- $i^T = [i_c | i_t]^T$

- i_c : 補木 T' , i_t : 木 T に対応する i の部分ベクトル

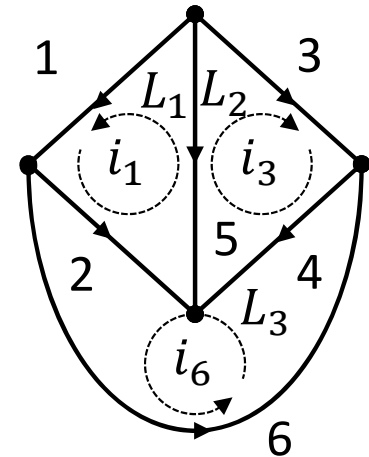
- KCL方程式

- $A_r i = [A_c A_t] \begin{bmatrix} i_c \\ i_t \end{bmatrix} = A_c i_c + A_t i_t = 0$

- $i_t = -A_t^{-1} A_c i_c = B_t^T i_c$

閉路変換の例

- 木2,4,5
- 補木1,3,6
- 補木1,3,6の枝の素子電流 i_1, i_3, i_6
- 補木1,3,6が形成する閉路 L_1, L_2, L_3
- 木2,4,5の枝に対応する素子電流 i_2, i_4, i_5



$$\begin{aligned}
 \bullet \quad B_f = [I|B_t] &= \begin{matrix} T' & T \\ L_1 & L_2 \\ L_3 & \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \\
 1 & & & & 1 & & -1 \\
 & 1 & & & & 1 & -1 \\
 & & 1 & -1 & 1 & &
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

閉路変換の例

$$\bullet \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_6 \\ i_3 + i_6 \\ -i_1 - i_3 \end{bmatrix} \\ = \mathbf{B}_t^T \mathbf{i}_c$$

$$\bullet \text{木 } T \text{ の電流ベクトル } \mathbf{i}_t = [i_2 \quad i_4 \quad i_5]^T$$

$$\bullet \text{補木 } T' \text{ の電流ベクトル } \mathbf{i}_c = [i_1 \quad i_3 \quad i_6]^T$$

$$\bullet \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{B}_t^T \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_t^T \end{bmatrix} \mathbf{i}_c = [\mathbf{I} \quad \mathbf{B}_t]^T \mathbf{i}_c = \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_c$$

電流制御形素子

- 素子電圧 $v(t)$ が素子電流 $i(t)$ の関数で表される
 - 抵抗: $v(t) = Ri(t)$
 - コンデンサ: $v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) = \frac{1}{C} \Gamma i(t) + v(t_0)$
 - Γ :積分記号, t_0 :時刻初期値
 - インダクタ: $v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = L\Delta i(t)$
 - Δ :微分記号
 - 電圧源: $v(t) = 0i(t) + e(t) = e(t)$
 - 電圧源は係数が0の電流制御型素子と見なす

閉路方程式の導出

- 補木電流変換: $\mathbf{i}(t) = \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_c(t)$
- KVL方程式: $\mathbf{B}_f \mathbf{v}(t) = 0$
- 特性方程式: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{E} \mathbf{i}(t) + \mathbf{e}(t)$
 - $\mathbf{v}(t) = \mathbf{E} \mathbf{i}(t) + \mathbf{e}(t) = \mathbf{E} \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_c(t) + \mathbf{e}(t)$
- 閉路方程式の導出:
 - $\mathbf{B}_f \mathbf{v}(t) = \mathbf{B}_f (\mathbf{E} \mathbf{i}(t) + \mathbf{e}(t)) = 0$
 - $\mathbf{B}_f \mathbf{E} \mathbf{i}(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{e}(t) = 0$
 - $m - n + 1$ 個の節点電位を未知数とする連立方程式
 - $m - n$ 個の独立なループに対するKVL方程式

閉路変換まとめ

- 閉路方程式

- $\mathbf{B}_f \mathbf{\Xi} \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_c(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{e}(t) = 0$

- KVL方程式 $m - n + 1$ 個より導出

- $\mathbf{i}_c(t)$: 閉路電流ベクトル, $\mathbf{e}(t)$: 電圧源ベクトル

- $\mathbf{\Xi}$: 電流制御型の特性格行列(対角行列)

- \mathbf{B}_f : 基本閉路行列

- $\mathbf{i}(t) = \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_c(t)$

- $\mathbf{v}(t) = \mathbf{\Xi} \mathbf{i}(t) + \mathbf{e}(t)$