

回路とシステム

第九回

1ポート回路の安定性・正実性

2ポート回路

舟木 剛

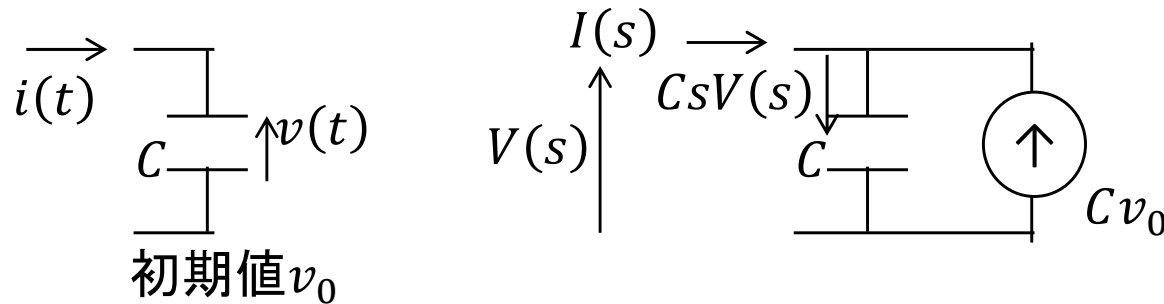
2022年12月5日2限

講義計画

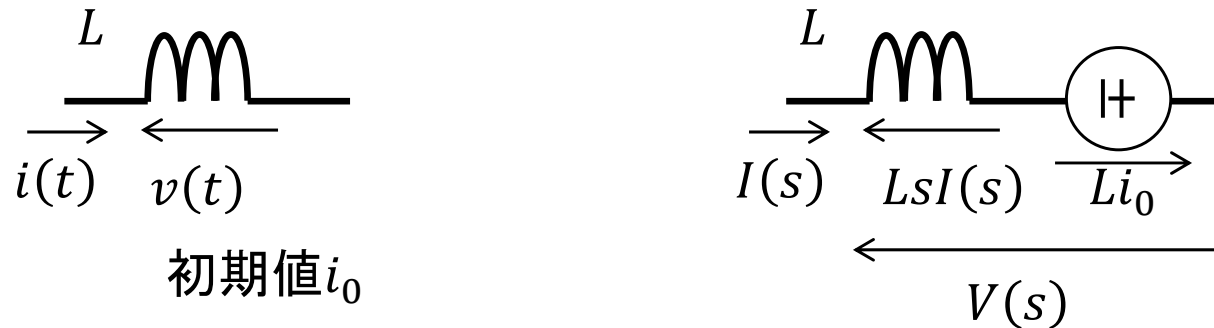
- 回路方程式 1回
 - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
 - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
 - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回
 - テブナン・ノートンの定理
 - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回
 - 2ポート回路の行列表現
 - 相反2ポート回路
 - 相互接続
 - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、 π 形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回
 - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
 - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
 - 平衡三相回路

ラプラス変換と等価回路

- $$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow I(s) = C\{sV(s) - v_0\}$$



- $$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow V(s) = L\{sI(s) - i_0\}$$

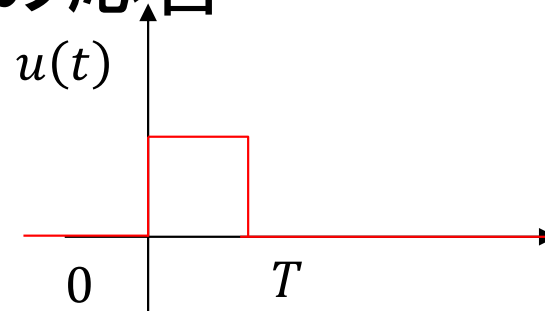


安定性と正実性

- 漸近安定:伝達関数の極が全て $Re[s] < 0$ (実部が負)
- 開放安定:1ポート回路の駆動点インピーダンス $Z(s)$ の極が全て $Re[s] < 0$
 - 入力:電流, 出力:電圧
- 短絡安定: 1ポート回路の駆動点アドミタンス $Y(s)$ の極が全て $Re[s] < 0$
 - 入力:電圧, 出力:電流

安定性

- インピーダンスの $Z(s)$ の極が全て $Re[s] < 0$
 - 1ポート回路を電流源 $u(t)$ で駆動
 - $u(t) = 0$ for $t < 0, T < t$
 - $t < 0, T < t$ で $u(t)$ を開放
 - 有限継続時間の入力
 - 駆動点の電圧 $v(t)$ の応答
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$



安定性

- インピーダンスの $Z(s)$ の極が全て $Re[s] < 0$
 - $Z(s) = a_m s^m + \dots + a_0 + Z_1(s)$
 - $Z_1(s) = \sum \frac{L_i}{s-p_i}$
- 電圧の応答
 - $V(s) = Z(s)U(s) = (a_m s^m + \dots + a_0)U(s) + Z_1(s)U(s)$
 - $\mathcal{L}^{-1}[(a_m s^m + \dots + a_0)U(s)] = a_m u^{(m)}(t) + \dots + a_0 u(t)$
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} u^{(m)} = 0$
 - $\mathcal{L}^{-1}[Z_1(s)U(s)] = \sum L_i \int_{0^-}^{t^+} e^{p_i(t-\tau)} 1_+(t-\tau)u(\tau)d\tau = \sum L_i e^{p_i t} \int_{0^-}^T e^{-p_i \tau} u(\tau)d\tau$
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-p_i t} = 0$

正実関数

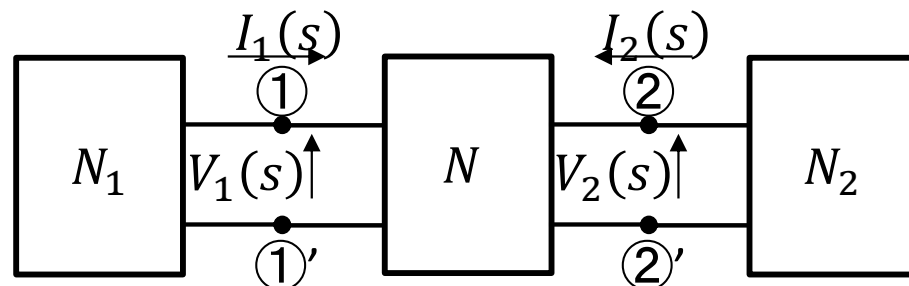
- 正実関数とは複素閉右半面 $\text{Re}[s] \geq 0$ を複素閉右半面 $\text{Re}[Z(s)] \geq 0$ に写像する複素関数
 - 正実関数 $V(s)$, $W(s)$ の非負係数 α, β による一次結合 $\alpha V(s) + \beta W(s)$ も正実関数
 - 正実関数 $W(s)$ の $\frac{1}{W(s)}$ も正実関数
 - $\text{Re} \left[\frac{1}{W(s)} \right] = \text{Re} \left[\frac{W^*(s)}{W(s)W^*(s)} \right] = \frac{\text{Re}[W^*(s)]}{|W(s)|^2} = \frac{\text{Re}[W(s)]}{|W(s)|^2} \geq 0$
 - RLCM回路の駆動点インピーダンス, アドミタンスは正実関数

RLCM回路の駆動点インピーダンスの性質

- RLCM回路の駆動点インピーダンス $W(s)$
 - $\text{Re}[W(s)] \geq 0 \forall \text{Re}[s] \geq 0$
 - $W(s)$ は実係数有理関数
 - $W(s)$ は正実関数
- テレゲン定理より $Z(s), Y(s)$ は上記の性質を持つ
 - 電力の和が0: $\sum_k v_k(t) i_k(t) = 0$
 - $I(s)V^*(s) = \sum_k I_k(s) V_k^*(s)$
 - $\text{Re}[I(s)V^*(s)] = \text{Re}[\sum_k I_k(s) V_k^*(s)] \geq 0$
 - $V(s) = Z(s)I(s) \quad I(s) = Y(s)V(s)$
 - $\text{Re}[I(s)V^*(s)] = \text{Re}[Z(s)]|I(s)|^2 = \text{Re}[Y(s)]|V(s)|^2$
 - $I(s)I^*(s) = |I(s)|^2 \quad V(s)V^*(s) = |V(s)|^2$

2ポート回路

- 大規模回路は分割して解析する方がやりやすい
- 1ポート回路 N_1, N_2 が接続された4端子回路 N
 - N_1, N_2 は結合していない
 - ポート条件
 - 端子①から出た電流 I_1 は端子①'から入る(端子対①-①')
 - 端子②から出た電流 I_2 は端子②'から入る(端子対②-②')
 - 4個の端子が2つの端子対を形成→2ポート回路
 - ①-①'一次側ポート, 入力ポート
 - ②-②'二次側ポート, 出力ポート



2ポート回路

- 線形時不変, 内部電源を持たない2ポート回路の零状態応答
 - ポート電圧 V_1, V_2 , ポート電流 I_1, I_2
 - 重ね合わせの理を適用可能
 - 独立変数 (x, y) , 従属変数 (p, q)
 - $$\begin{bmatrix} p(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$$
 - インピーダンス行列, アドミタンス行列
 - ハイブリッド行列, 伝送行列

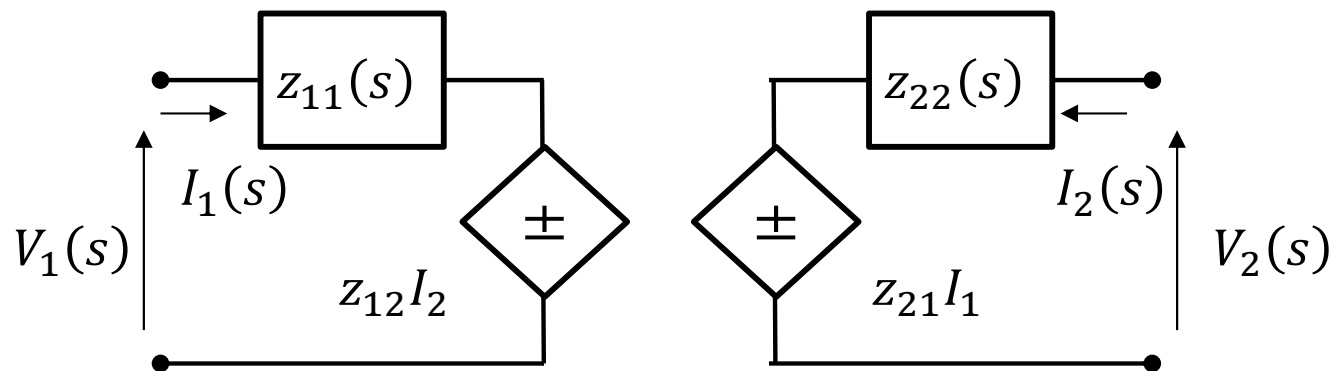
2ポート回路 インピーダンス行列

- $$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

- $z_{ij}(s)$: zパラメータ

- $V(s) = Z(s)I(s)$

- $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$



等価回路表現

2ポート回路 インピーダンス行列

- $z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$:2次側開放($I_2 = 0$)における1次側から見た駆動点インピーダンス
- $z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$:1次側開放($I_1 = 0$)における2次側から見た駆動点インピーダンス
- $z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$:2次側開放($I_2 = 0$)における1次側から2次側への伝達インピーダンス
- $z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$:1次側開放($I_1 = 0$)における2次側から1次側への伝達インピーダンス
- トランスの場合 $\mathbf{Z}(s) = s \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$

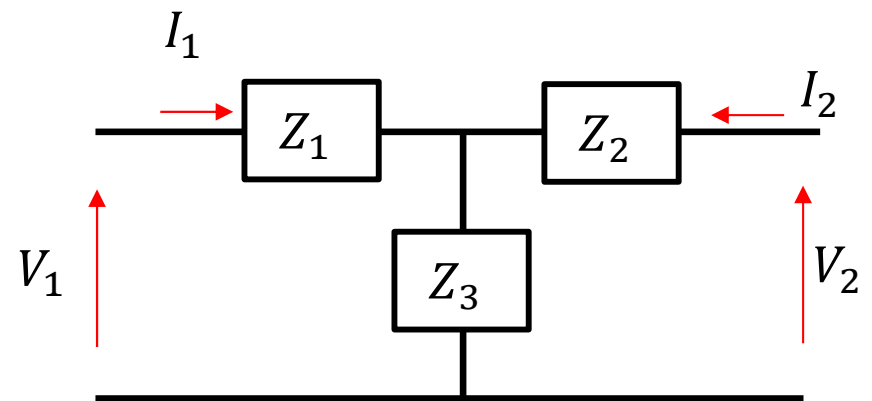
2ポート回路 インピーダンス行列例題

- $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3$

- $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3$

- $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_3$

- $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_3$



2ポート回路 インピーダンス行列例題

- $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 1\Omega + 3\Omega = 4\Omega$

- $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 2\Omega + 3\Omega + 4\Omega = 9\Omega$

- $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 3\Omega$

- $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 3\Omega$

