回路とシステム
第14回
状態方程式
三相回路

舟木　剛

2023年1月23日2限

講義計画

- 回路方程式 1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路 3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路 4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π 形等価回路）
- 状態方程式による回路解析 2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流 1回
  - 平衡三相回路

状態方程式の解

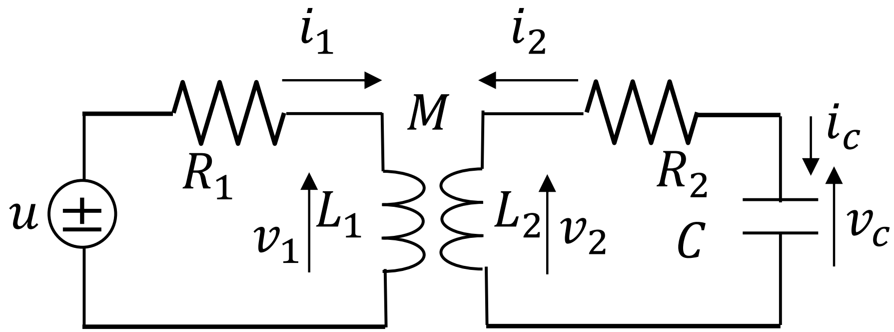
- 時間領域
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　　$\boldsymbol{A}: n \times n$, $\boldsymbol{B}: n \times m$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$　　　$\boldsymbol{C}: p \times n$, $\boldsymbol{D}: p \times m$
  - 状態変数:$\boldsymbol{x}(t)$
  - 入力変数:$\boldsymbol{u}(t)$
  - 出力変数:$\boldsymbol{y}(t)$
- s領域
  - $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s)$
  - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

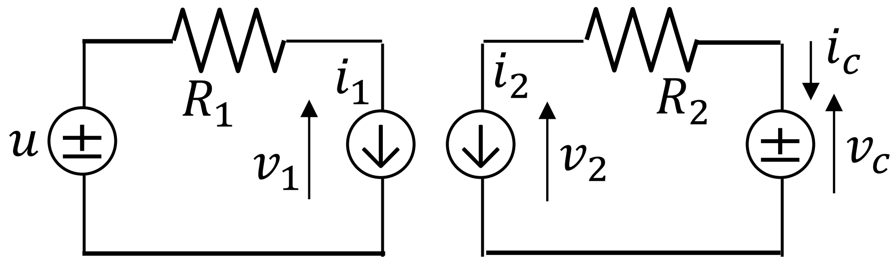
- 行列表現
  - $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}(0^-) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$
    $$= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$$
    - 零入力応答$\boldsymbol{U}(s) = 0$　$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$
    - 零状態応答$\boldsymbol{x}(0^-) = 0$　$[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式例題

- 結合インダクタを含む回路
  - 状態変数
    - i_1, i_2, v_C
  - 結合インダクタの電圧・電流
    - $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
  - KVL
    - $v_1 = u - R_1 i_1$
    - $v_2 = v_c - R_2 i_2$
  - コンデンサ
    - $C \frac{d}{dt} v_c = i_c = -i_2$
  - 状態方程式
    - $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix}$



等価回路

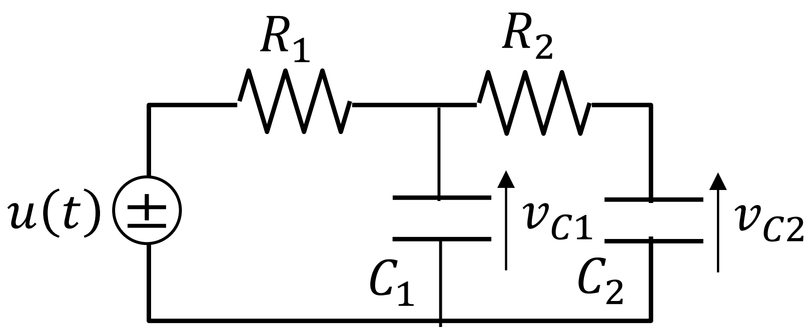


状態方程式例題

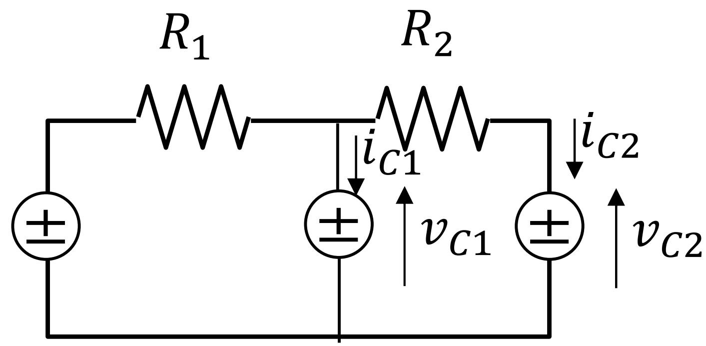
- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\left\{\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 \\ MR_1 & -L_1R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} uL_2 & -Mv_c \\ -Mu & L_1v_c \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\left\{\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 & -M \\ MR_1 & -L_1R_2 & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ -M \end{bmatrix}u\right\}$$
- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-L_2R_1}{L_1L_2-M^2} & \frac{MR_2}{L_1L_2-M^2} & \frac{-M}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{MR_1}{L_1L_2-M^2} & \frac{-L_1R_2}{L_1L_2-M^2} & \frac{L_1}{L_1L_2-M^2} \\ 0 & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{-M}{L_1L_2-M^2} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

状態方程式例題

- RC回路
  - 状態変数
    - v_{c1}, v_{c2}
  - KVL
    - $u = R_1(i_{c1} + i_{c2}) + v_{c1}$
    - $v_{c1} \; = R_2 i_{c2} + v_{c2}$
  - コンデンサ
    - $C_1 \frac{d}{dt} v_{c1} = i_{c1}$
    - $C_2 \frac{d}{dt} v_{c2} = i_{c2}$
  - 状態方程式の導出
    - $u = R_1 \left(C_1 \frac{d}{dt} v_{c1} + C_2 \frac{d}{dt} v_{c2} \right) + v_{c1}$
    - $v_{c1} \; = R_2 C_2 \frac{d}{dt} v_{c2} + v_{c2}$



等価回路



状態方程式例題

- $R_1 C_1 \frac{d}{dt} v_{c1} + R_1 C_2 \frac{d}{dt} v_{c2} = -v_{c1} + u$
- $R_2 C_2 \frac{d}{dt} v_{c2} = v_{c1} - v_{c2}$
- $\begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ 0 & R_2 C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$
- $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ 0 & R_2 C_2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \right\}$

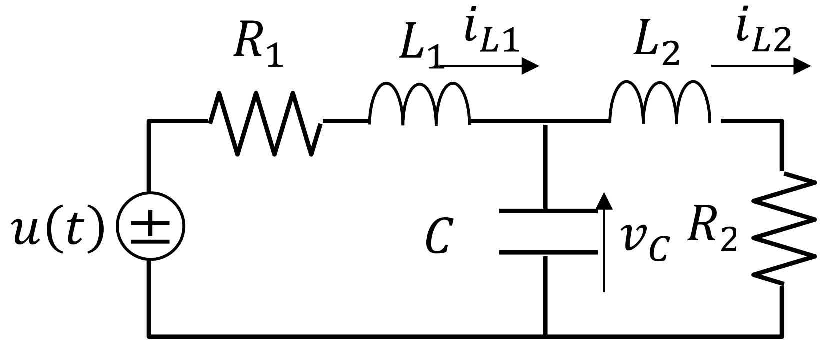
$$= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \begin{bmatrix} R_2 C_2 & -R_1 C_2 \\ 0 & R_1 C_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \right\}$$

$$= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \begin{bmatrix} -R_2 C_2 - R_1 C_2 & R_1 C_2 \\ R_1 C_1 & -R_1 C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \begin{bmatrix} R_2 C_2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

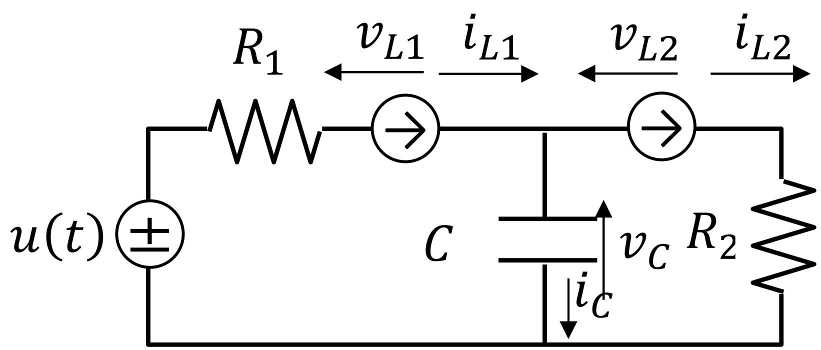
$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

状態方程式例題

- RC回路
  - 状態変数
    - i_{L1}, i_{L2}, v_c
  - KVL
    - $u = R_1 i_{L1} + v_{L1} + v_c$
    - $v_c = v_{L2} + R_2 i_{L2}$
  - KCL
    - $i_{L1} = i_{L2} + i_c$
  - インダクタ
    - $L_1 \frac{d}{dt} i_{L1} = v_{L1}$
    - $L_2 \frac{d}{dt} i_{L2} = v_{L2}$
  - コンデンサ
    - $C \frac{d}{dt} v_c = i_c$



等価回路



状態方程式例題

- 状態方程式の導出
  - $u = R_1 i_{L1} + L_1 \frac{d}{dt} i_{L1} + v_c$
    - $L_1 \frac{d}{dt} i_{L1} = -R_1 i_{L1} - v_c + u$
  - $v_c = L_2 \frac{d}{dt} i_{L2} + R_2 i_{L2}$
    - $L_2 \frac{d}{dt} i_{L2} = -R_2 i_{L2} + v_c$
  - $i_{L1} = i_{L2} + C \frac{d}{dt} v_c$
    - $C \frac{d}{dt} v_c = i_{L1} - i_{L2}$

状態方程式例題

- $\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -1 \\ 0 & -R_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$
- $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1} \left\{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -1 \\ 0 & -R_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\right\}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \left\{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -1 \\ 0 & -R_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\right\}$$

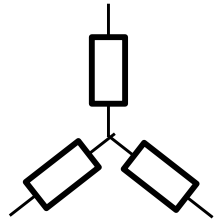
$$= \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_1} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

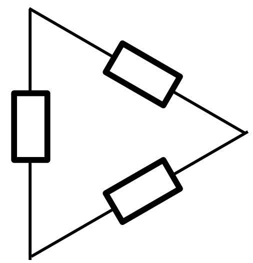
多相交流回路

- 複数の交流電源が回路に同時に存在
  - n個存在→n 相式
  - 周波数が同じ
  - 位相が異なる
  - その他の条件
    - 対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが等しく，位相差が等間隔
    - 非対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが一致しない，または位相差が等間隔でない

多相交流の結合方式

- 独立多相方式　各相が結合されていない
- 結合多相方式　各相が結合されている
  - 平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が一定
  - 不平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が脈動する
  - 星形結線　各相の終端が共通
    - 三相Y結線
  - 環状結線　各相の終端を次相の始端に接続
    - 三相Δ結線





対称多相交流

- 対称n相交流の起電力の瞬時値
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)$
  - $e_n = E_m \sin\left(\omega t - \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)$
    - E_m:振幅
    - ω:角周波数
    - $\frac{2\pi}{n}$:位相差
- ベクトル表記
  - $E_a = E$
  - $E_b = E e^{-j\frac{2\pi}{n}} = E\left(\cos\frac{2\pi}{n} - j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$
  - $E_n = E e^{-j\frac{n-1}{n}2\pi} = E\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi - j\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right)$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}$
    - $E_a = E$
    - $E_b = a^{-1}E$
    - $E_n = a^{-(n-1)}E$

単相交流回路の瞬時電力

- 電圧:$v(t) = V \sin \omega t$
- 電流:$i(t) = I \sin(\omega t + \theta)$
- 電力:$p(t) = v(t)i(t)$

$$= VI \sin \omega t \sin(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{VI}{2}\{\cos \theta - \cos(2\omega t + \theta)\}$$

  - 直流成分:$\frac{VI}{2}\cos \theta$
  - 変動成分:$\frac{-VI}{2}\cos(2\omega t + \theta)$

電圧・電流位相がずれると
有効電力が減少する

単相交流の電力は一定でない
2倍の周波数で変化する

三相平衡交流回路の瞬時電力

- A相
  - 電圧:$v_a(t) = V \sin \omega t$
  - 電流:$i_a(t) = I \sin(\omega t + \theta)$
  - 電力:$p_a(t) = \frac{VI}{2}\{\cos\theta - \cos(2\omega t + \theta)\}$
- B相
  - 電圧:$v_b(t) = V \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電流:$i_b(t) = I \sin\left(\omega t + \theta - \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電力:$p_b(t) = \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$
- C相
  - 電圧:$v_c(t) = V \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電流:$i_c(t) = I \sin\left(\omega t + \theta + \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電力:$p_c(t) = \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta + \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$

三相平衡交流回路の瞬時電力

- 三相の合計電力
  - $p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$
    $$= \frac{VI}{2}\{\cos\theta - \cos(2\omega t + \theta)\} + \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} + \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta + \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$$
    $$= \frac{3VI}{2}\cos\theta$$
    - $\cos(2\omega t + \theta) + \cos\left(2\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(2\omega t + \theta + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$
    - 三相平衡交流では電力は一定になる
    - 不平衡では2倍の周波数の変動成分が現れる