回路とシステム
第三回
ラプラス変換による回路解析

舟木　剛

2023年10月23日2限

講義計画

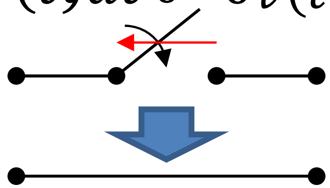
- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π 形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

ラプラス変換による回路解析

- 回路の過渡応答　→　微分方程式
- 線形時不変回路　→　ラプラス変換による常微分方程式の求解が可能
- ラプラス変換　時間領域→複素領域
  - $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
    - $\mathcal{L}[i_k(t)] = I_k(s), \mathcal{L}[v_k(t)] = V_k(s)$
- 逆変換
  - $f(t) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-ip}^{c+ip} F(s)e^{st}ds$

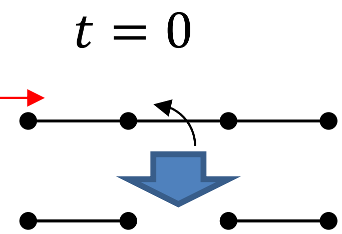
ラプラス変換による回路解析

- スイッチ
  - $t < 0$で直流定常状態
  - 閉スイッチ　$t = 0$でオン
    - 時間領域
      - $v(t)$=有限の値　　$t < 0$
      - $v(t) = 0$　　　　$t > 0$
    - 複素領域
      - $V(s) = \int_0^\infty v(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} v(t)dt = 0$
        - s領域では短絡枝



ラプラス変換による回路解析

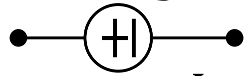
- スイッチ
  - $t < 0$で直流定常状態
  - 開スイッチ　$t = 0$でオフ
    - 時間領域
      - $i(t)$=有限の値　　$t < 0$
      - $i(t) = 0$　　　　$t > 0$
    - 複素領域
      - $I(s) = \int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} i(t)dt = 0$



ラプラス変換による回路解析

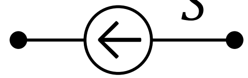
- 電源
  - 電圧源$e_s(t)$　　$\mathcal{L}[e_s(t)] = E_s(s) = \frac{E}{S}$

$E_s = \frac{E}{S}$



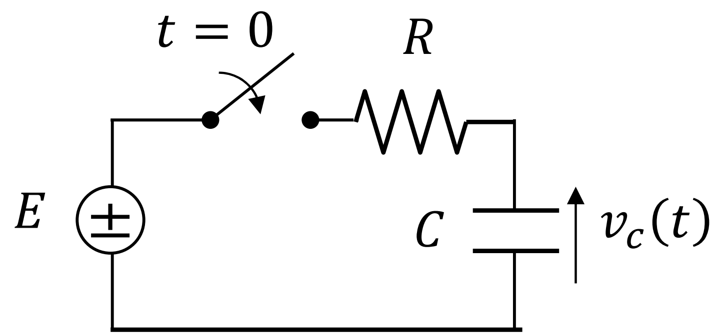
  - 電流源$j_s(t)$　　$\mathcal{L}[j_s(t)] = J_s(s) = \frac{J}{S}$

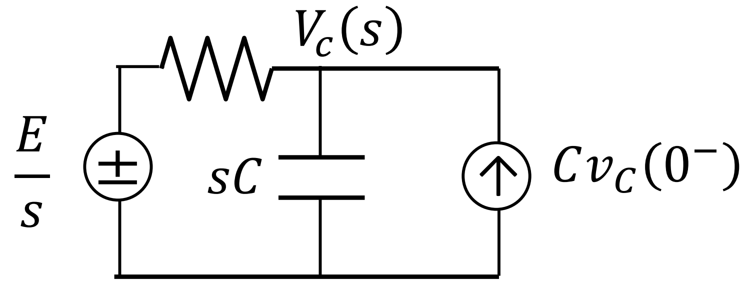
$J_s = \frac{J}{S}$



- 線形時不変の素子で構成される回路網
  - S領域では電源を含む抵抗回路網の解析になる
    - 初期値が0の場合
      - $V(s) = Z(s)I(s)$　　$Z(s) = R, sL, \frac{1}{sC}$
      - $I(s) = Y(s)V(s)$　　$Y(s) = \frac{1}{R}, \frac{1}{sL}, sC$

ラプラス変換による回路解析例





- t=0でスイッチオン
- RC回路の$t > 0$における応答
  - 節点方程式
    - $\frac{\frac{E}{S} - V_C(s)}{R} = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$
    - $V_C(s)\left\{sC + \frac{1}{R}\right\} = \frac{\frac{E}{s}}{R} + Cv_C(0^-)$
    - $V_C(s) = \frac{\frac{E}{sR} + Cv_C(0^-)}{sC + \frac{1}{R}} = \frac{E + sCRv_C(0^-)}{s(sCR+1)} = \frac{E}{s} + \frac{v_C(0^-) - E}{s + \frac{1}{CR}}$
  - 時間応答
    - $v_C(t) = E + [v_C(0^-) - E]e^{-\frac{t}{CR}}$

部分分数分解

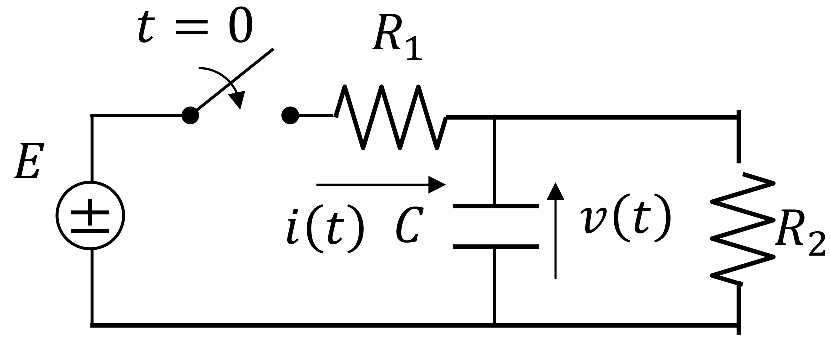
- $\frac{cs+d}{(s+a)(s+b)} = \frac{x}{s+a} + \frac{y}{s+b}$
  - $x = \frac{cs+d}{(s+a)(s+b)}(s+a)\Big|_{s=-a} = \frac{-ca+d}{-a+b}$
  - $y = \frac{cs+d}{(s+a)(s+b)}(s+b)\Big|_{s=-b} = \frac{-cb+d}{-b+a}$
  - $\frac{x}{s+a} + \frac{y}{s+b} = \frac{1}{s+a}\frac{-ca+d}{-a+b} + \frac{1}{s+b}\frac{-cb+d}{-b+a}$

$$= \frac{(ca-d)(s+b) + (-cb+d)(s+a)}{(s+a)(s+b)(a-b)}$$

$$= \frac{(ca-d-cb+d)s + (ca-d)b + (-cb+d)a}{(s+a)(s+b)(a-b)}$$

$$= \frac{c(a-b)s + (a-b)d}{(s+a)(s+b)(a-b)} = \frac{cs+d}{(s+a)(s+b)}$$

ラプラス変換による回路解析例



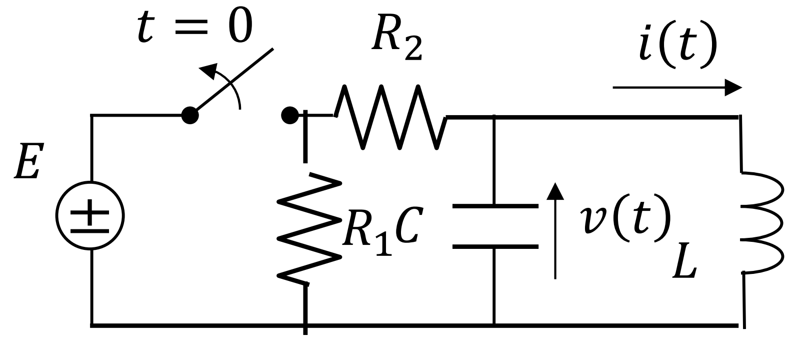
- t=0でスイッチオン
- 初期値は0
  - KVL:$-E+R_1 i(t)+v(t)=0$
    - $-\frac{E}{s}+R_1 I(s)+V(s)=0$
  - KCL:$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R_2}$
    - $I(s)=CsV(s)+\frac{V(s)}{R_2}$

$$-\frac{E}{s}+R_1\left[CsV(s)+\frac{V(s)}{R_2}\right]+V(s)=0$$

  - $V=\frac{E}{R_1 s}\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC}=\frac{R_2 E}{R_1+R_2}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{Rc}}\right]$
  - $v(t)=\frac{R_2 E}{R_1+R_2}\left[1-e^{\frac{-t}{RC}}\right]$

$$R=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

ラプラス変換による回路解析例



- t=0でスイッチオフ
- 初期値:$i(0_-) = \dfrac{E}{R_2}$
  - $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \rightarrow \quad V(s) = L[sI(s) - i_0]$
- 初期値:$v(0_-) = 0$
  - $i_c(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt} \rightarrow \; I_C(s) = CsV(s)$
- KVL: $(R_1 + R_2)[i(t) + i_c(t)] + v(t) = 0$
  - $(R_1 + R_2)[I(s) + I_c(s)] + V(s) = 0$

ラプラス変換による回路解析例

- $V(s) = L[sI(s) - i_0]$
  - $sI(s) = \frac{V(s)}{L} + i_0$
  - $I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s}$
- $(R_1 + R_2)\left[CsV(s) + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s}\right] + V(s) = 0$
  - $CsV(s) + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s} + \frac{V(s)}{R_1+R_2} = 0$
  - $V(s)\left[Cs + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1+R_2}\right] = -\frac{i_0}{s}$

ラプラス変換による回路解析例

- $R_1 + R_2 = R$とおいて
  - $V(s)\ \left[Cs + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}\right] = V(s)\ \left[\frac{s^2RLC+R+sL}{sLR}\right] = -\frac{i_0}{s}$
  - $V(s) = -\frac{i_0}{s}\frac{sLR}{s^2RLC+R+sL} = -\frac{i_0LR}{s^2RLC+R+sL}$

    $$= -\frac{i_0}{C}\frac{1}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

    - $s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow s = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$
    - $v(t) = -\frac{i_0}{C}\left[e^{\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} + e^{\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}\right]$

ラプラス変換による回路解析例

- $I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s} = -\frac{i_0}{C}\frac{1}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}\frac{1}{sL} + \frac{i_0}{s}$
  - $I(s) = \frac{i_0}{sLC}\left[LC - \frac{1}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}\right]$

$$= \frac{i_0}{s} - \frac{s+\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

ラプラス変換による回路解析例

- $\dfrac{s+\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} = \dfrac{a}{s-\dfrac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}} + \dfrac{b}{s-\dfrac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}$
  - $s+\dfrac{1}{RC} = a\left[s-\dfrac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}\right] + b\left[s-\dfrac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}\right]$
    $= (a+b)s - \dfrac{1}{2}\left\{a\left[-\dfrac{1}{RC}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{RC}\right)^2-\dfrac{4}{LC}}\right] + b\left[-\dfrac{1}{RC}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{RC}\right)^2-\dfrac{4}{LC}}\right]\right\}$
    - $a+b=1$
    - $\dfrac{-2}{RC} = a\left[-\dfrac{1}{RC}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{RC}\right)^2-\dfrac{4}{LC}}\right] + b\left[-\dfrac{1}{RC}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{RC}\right)^2-\dfrac{4}{LC}}\right]$

$$= -(a+b)\frac{1}{RC} + (a-b)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}$$

$$= -\frac{1}{RC} + (1-2a)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}$$

ラプラス変換による回路解析例

- $a = \frac{1-\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}, b = \frac{1+\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}$
- $I(s) = \frac{i_0}{s} - \frac{\frac{1-\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}}{s-\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}} - \frac{\frac{1+\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}}{s-\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}$
- $i(t) = i_0 - \frac{1-\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2} e^{\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} - \frac{1+\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2} e^{\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}$