回路とシステム
第四回
ラプラス変換による回路解析

舟木　剛

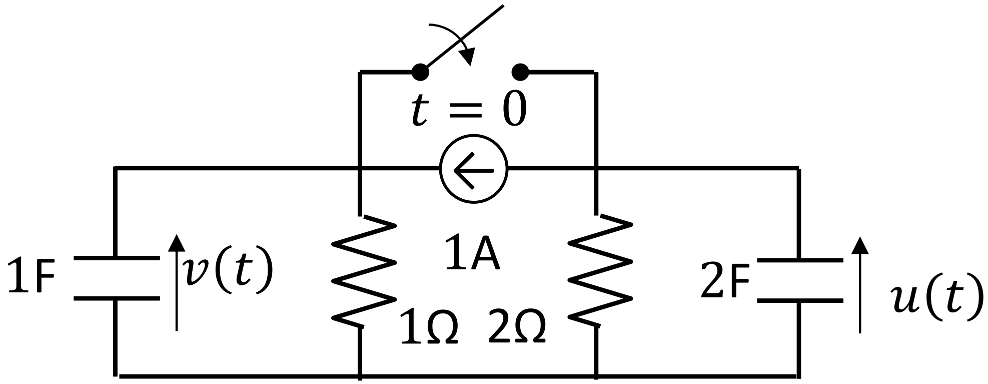
2023年10月30日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

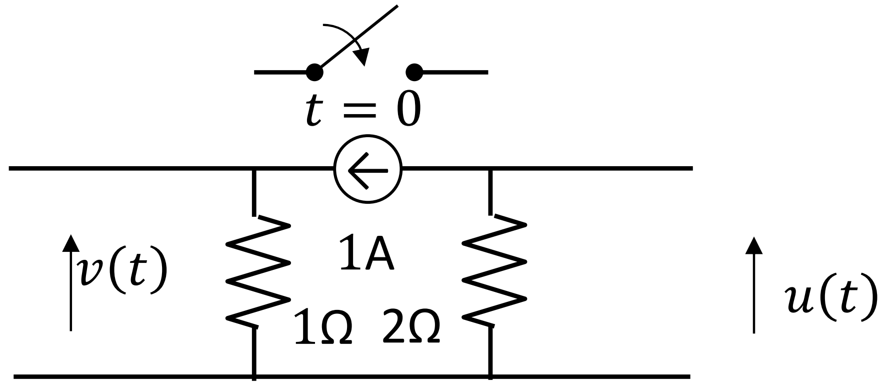
ラプラス変換による回路解析例

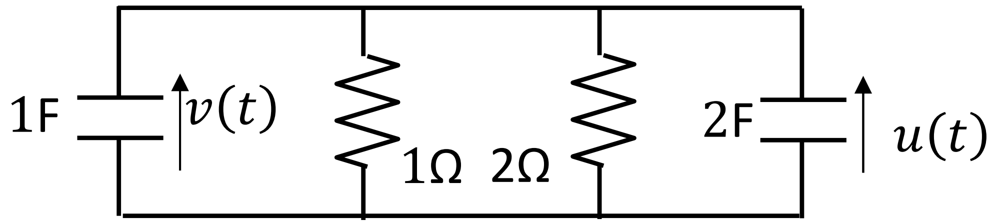
- 直流定常状態
- t=0でスイッチオン
- $v(t), u(t)$を求める

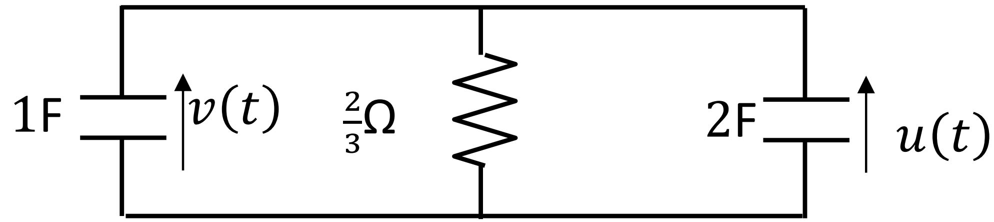


ラプラス変換による回路解析例

- 直流定常状態
  - $v(t) = 1 \times 1 = 1\ \mathrm{V}$
  - $u(t) = 2 \times -1 = -2\ \mathrm{V}$
- $t \geq 0$
  - $i_v(t) = C_v \dfrac{dv(t)}{dt}$
    - $I_v(S) = C_v\{sV(s) - v_0\}$
  - $i_u(t) = C_u \dfrac{du(t)}{dt}$
    - $I_u(S) = C_u\{sU(s) - u_0\}$
  - $v(t) = u(t)$
    - $V(s) = U(S)$







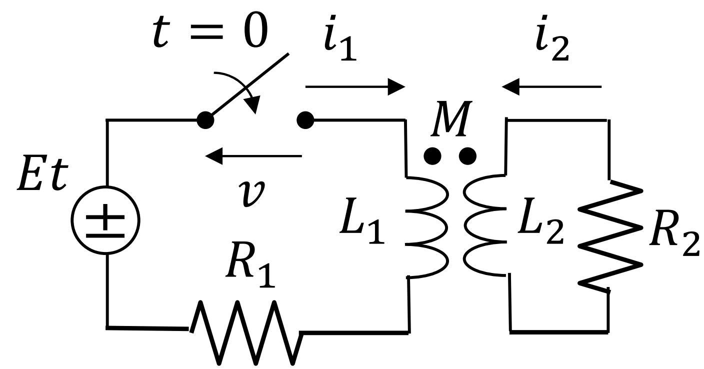
ラプラス変換による回路解析例

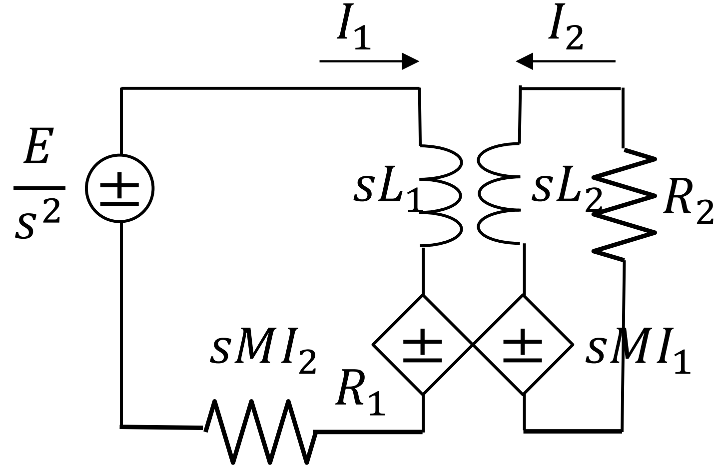
- $V(s) = -\frac{2}{3}\{I_v(S) + I_u(S)\}$
  - $I_v(S) = 1\{sV(s) - 1\}$
  - $I_u(S) = 2\{sV(s) + 2\}$
- $V(s) = -\frac{2}{3}\left\{1\{sV(s) - 1\} + 2\{sV(s) + 2\}\right\}$
  $= -\frac{2}{3}\{3sV(s) + 3\} = -2\{sV(s) + 1\}$
- $V(s)\{1 + 2s\} = -2$
- $V(s) = -\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$
- $v(t) = -e^{-\frac{1}{2}t}$

結合インダクタ(トランス)回路

- t=0でスイッチオン，ランプ電圧源$Et \to \frac{E}{s^2}$
  - スイッチ → 初期値0
- KVL
  - $(sL_1 + R_1)I_1(s) + sMI_2(s) = \frac{E}{s^2}$
  - $(sL_2 + R_2)I_2(s) + sMI_1(s) = 0$
- 行列表現
  - $\begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{(sL_1 + R_1)(sL_2 + R_2) - (sM)^2} \begin{bmatrix} sL_2 + R_2 & -sM \\ -sM & sL_1 + R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$





結合インダクタ(トランス)回路

- $R_1 = 0.5\Omega, R_2 = 2\Omega, L_1 = 0.75\mathrm{H}\ , L_2 = 3\mathrm{H}\ ,$ $M = 0.5\mathrm{H}\ , E = 1\mathrm{V/s}$

  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2.25s^2+3s+1-0.25s^2} \begin{bmatrix} \frac{3s+2}{s^2} \\ -\frac{1}{2s} \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+0.5} \\ -\frac{1}{2s} - \frac{0.5}{s+1} + \frac{1}{s+0.5} \end{bmatrix}$

    $2s^2 + 3s + 1 = (2s+1)(s+1)$
  - $i_1(t) = 2t - 3 + e^{-t} + 2e^{-0.5t}$
  - $i_2(t) = -0.5 - 0.5e^{-t} + e^{-0.5t}$

回路の応答

- 線形時不変回路の応答
  - 微分代数方程式→ラプラス変換による求解
- 節点n個，枝b個の回路網
  - 節点電位ベクトル$E(s)$
    - 一つの節点を基準に選ぶ→$(n-1)$次
  - 枝電流・枝電圧ベクトル$I(s)$, $V(s)$
    - b次

回路方程式

- KCL　　$AI(s) = 0$
- KVL　　$V(s) = A^T E(s)$
  - 既約接続行列A　　$(n-1) \times b$
- 枝電流と枝電圧の関係

$$M(s)V(s) + N(s)I(s) = FU(s) + Gx^0$$

  - M, N　$b \times b$のsの多項式
  - F, G　定数行列
  - $U(s)$　入力電源
  - x^0　初期値

タブロー方程式

- $f(\boldsymbol{x}(t), p\boldsymbol{x}(t), ts) = 0$
  - $f(\quad)$:対象を表す式
  - $\boldsymbol{x}(t)$:対象の状態変数
  - $p \triangleq \frac{d}{dt}$:微分演算子

$$\left.\begin{array}{l}\text{節点方程式→電圧源不可}\\\text{閉路方程式→電流源不可}\end{array}\right\}$$

n-1個のKCL
b個のKVL,素子特性
を連立した表式

タブロー方程式での表現

- $$\begin{array}{c} n-1 \\ b \\ b \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I_b & 0 \\ 0 & M(s) & N(s) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ FU(s) + Gx^0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{KCL} \\ \text{KVL} \\ \text{特性式} \end{array}$$
  - I_b: $b \times b$の単位行列
- $$T \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

  節点方程式と閉路方程式を
  混ぜた表現
- $$\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \underbrace{T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}} U(s) + \underbrace{T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} x^0$$

  電圧源と電流源の
  両方を含める

タブロー方程式での表現

- $\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = H(s)U(s) + Q(s)x^0$
  - $H(s)U(s)$　　初期値x^0を0とした入力$U(s)$に対する応答
    - 零状態応答
  - $Q(s)x^0$　入力$U(s)$を0とした初期値x^0に対する応答
    - 零入力応答
- 全応答=零状態応答+零入力応答
  - 時間領域　　$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$
  - 複素領域　　$Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$