回路とシステム
第九回
1ポート回路の安定性・正実性
2ポート回路

舟木　剛

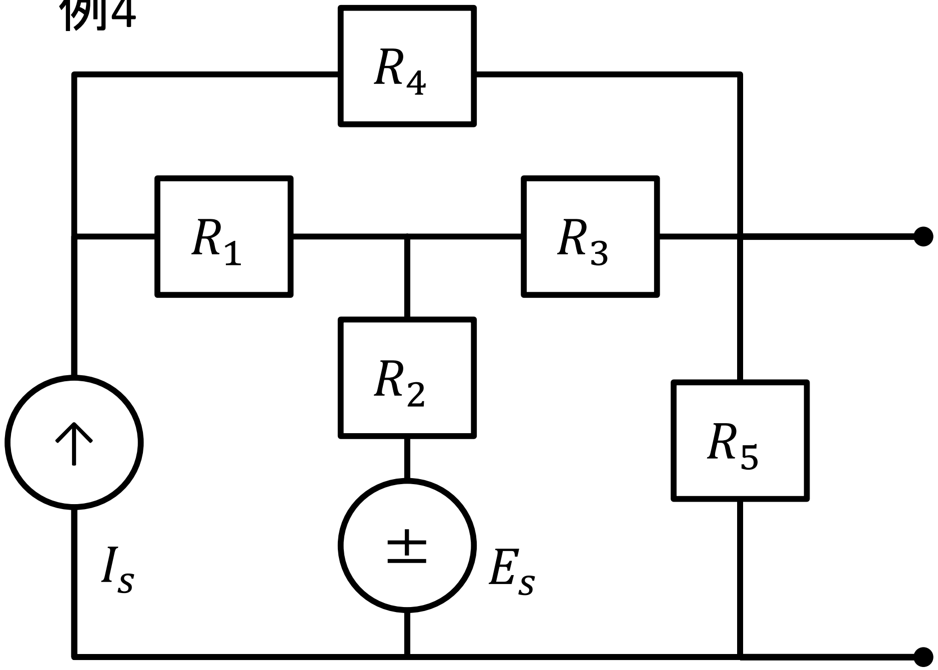
2023年12月4日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
  - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、π形等価回路)
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
  - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

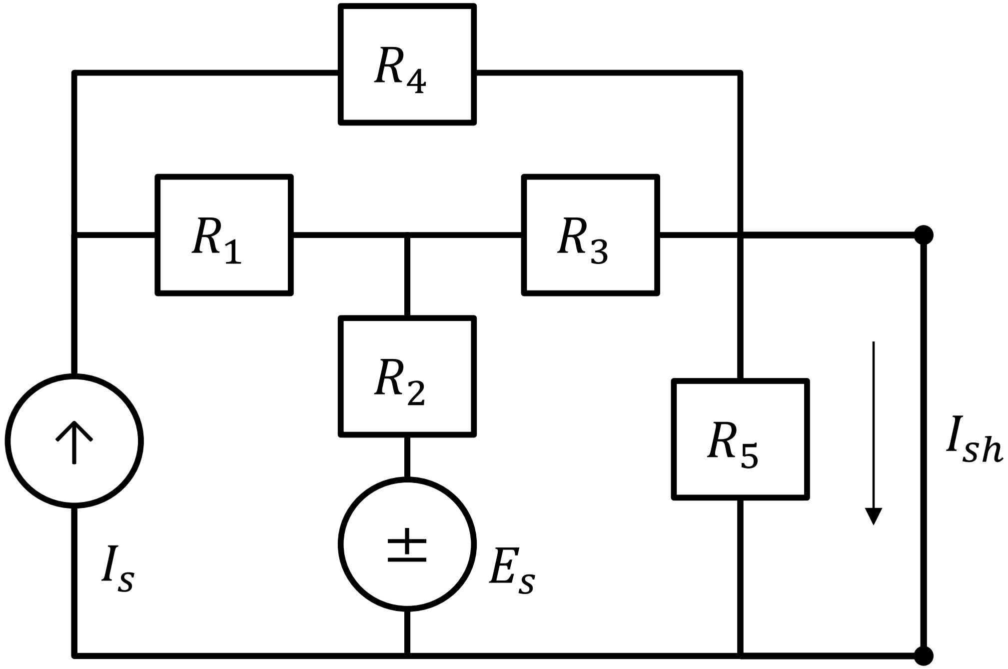
テブナン･ノートン回路

例4



左図のノートン等価回路
短絡電流I_{sh}を求める

出力短絡

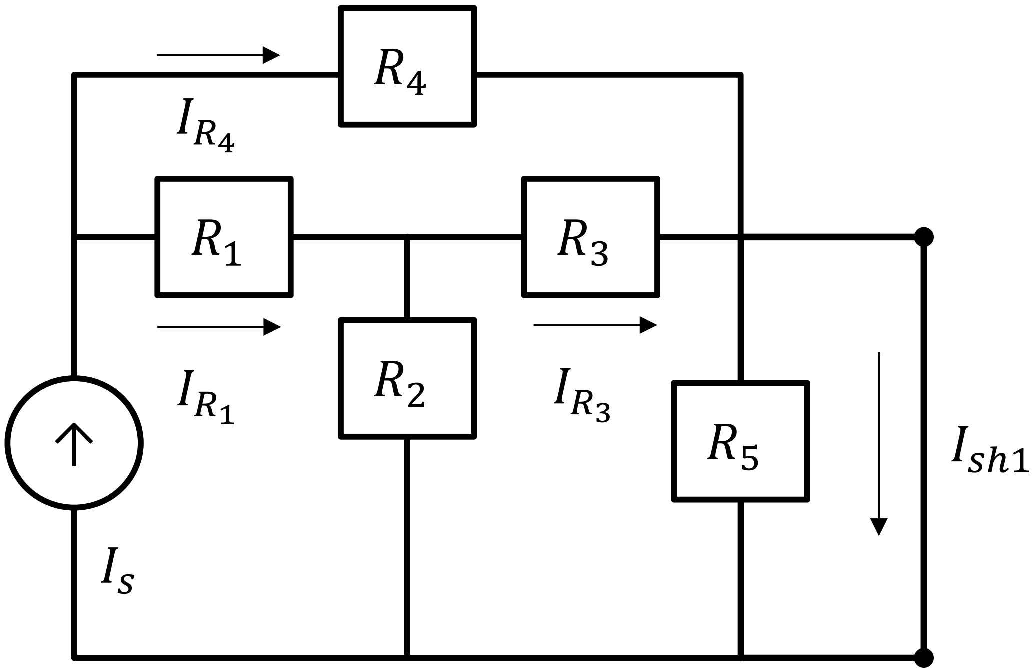


テブナン・ノートン回路

重ね合わせの理を用いる

例4

出力短絡
電圧源短絡



$$R_a = R_1 + (R_2//R_3)$$

$$I_{R_1} = I_s \frac{R_4}{R_a + R_4}$$

$$I_{R_3} = I_{R_1} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = I_s \frac{R_4}{R_a + R_4} \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$I_{R_4} = I_s \frac{R_a}{R_a + R_4}$$

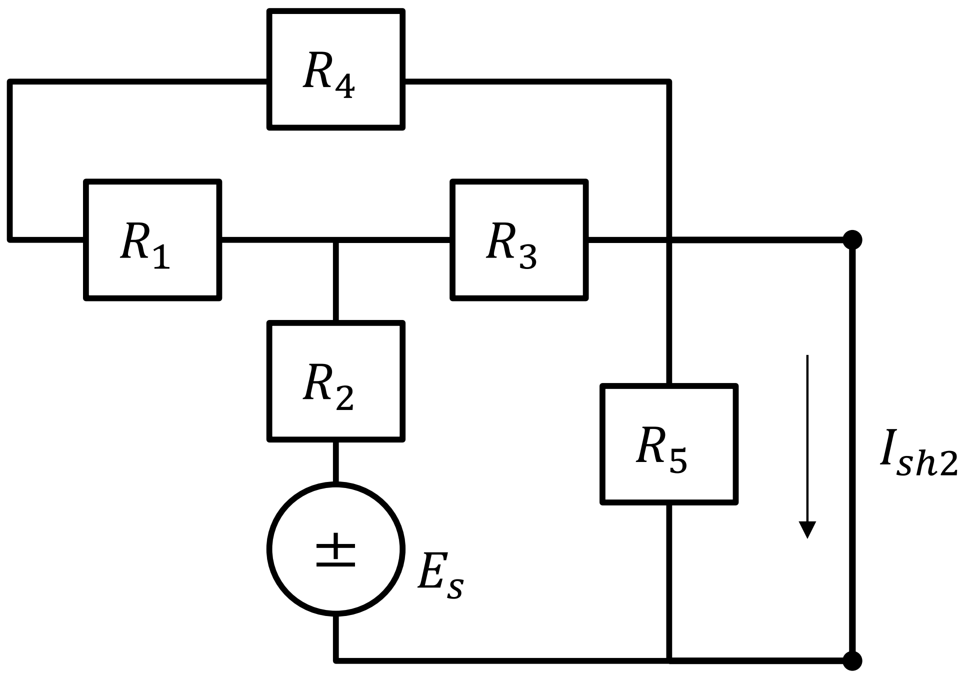
$$I_{sh1} = I_{R_3} + I_{R_4}$$

$$= I_s \left(\frac{R_4}{R_a + R_4} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{R_a}{R_a + R_4} \right)$$

テブナン・ノートン回路

重ね合わせの理を用いる

例4　出力短絡
電流源開放

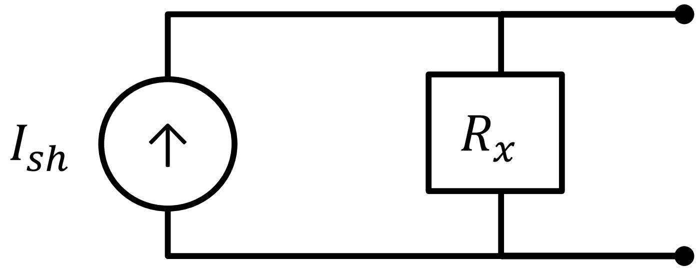


$$R_b = (R_1 + R_4)//R_3$$

$$I_{sh2} = I_{R2} = I_{R1} \frac{E_s}{R_2 + R_b}$$

電流源

$$I_{sh} = I_{sh1} + I_{sh2}$$

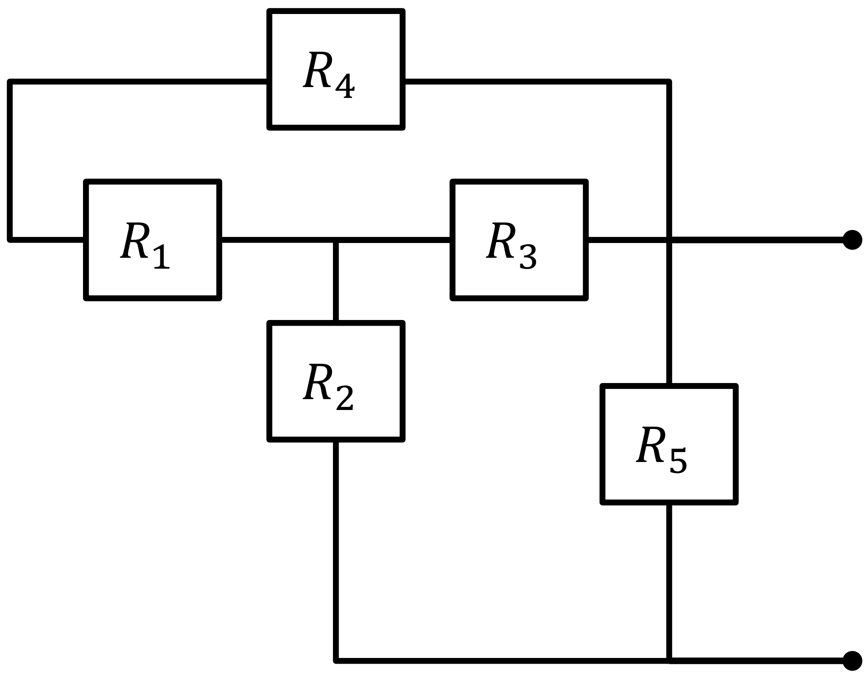


テブナン・ノートン回路

重ね合わせの理を用いる

例4

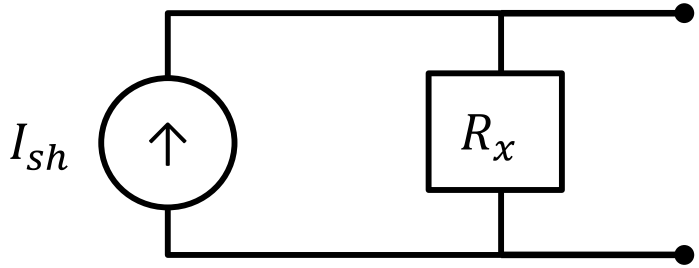
電圧源短絡・電流源開放



$$R_b = (R_1 + R_4)//R_3$$

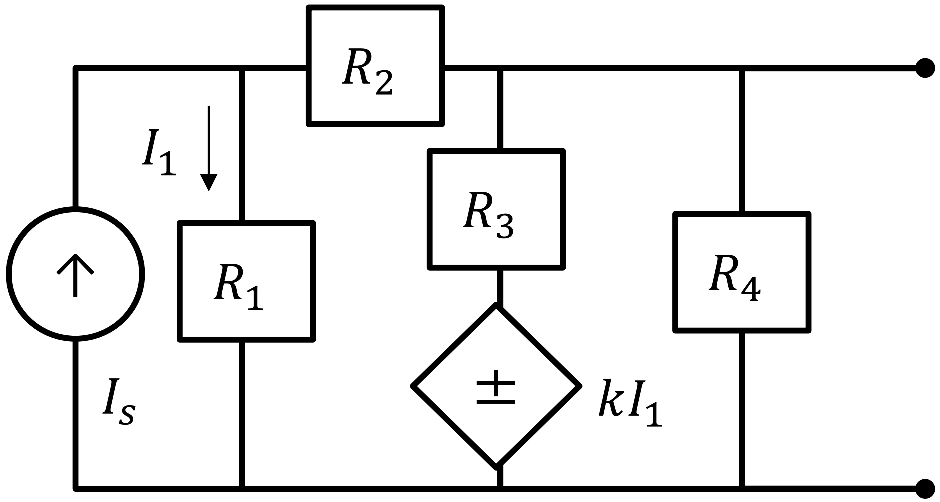
合成アドミタンス(インピーダンス)

$$R_x = (R_b + R_2)//R_5$$



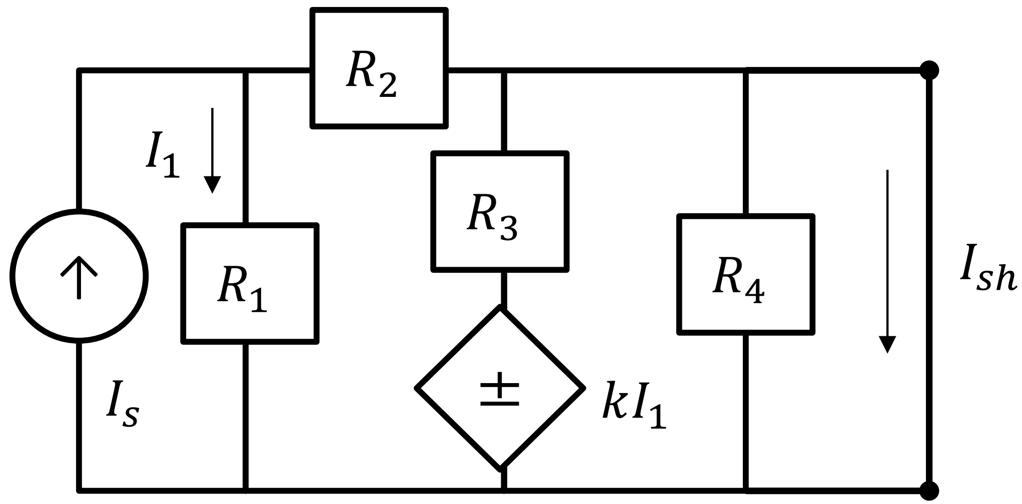
テブナン・ノートン回路

例5



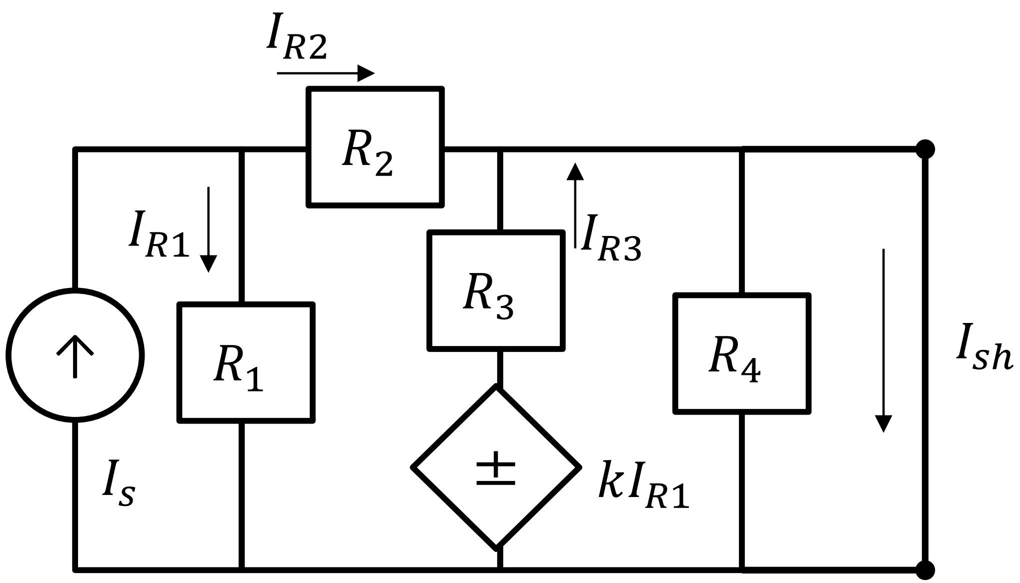
左図のノートン等価回路
短絡電流I_{sh}を求める

出力短絡



テブナン・ノートン回路

例5 出力短絡



$$I_{R_2} = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_{R_1} = I_S - I_{R_2} = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$kI_{R1} = kI_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

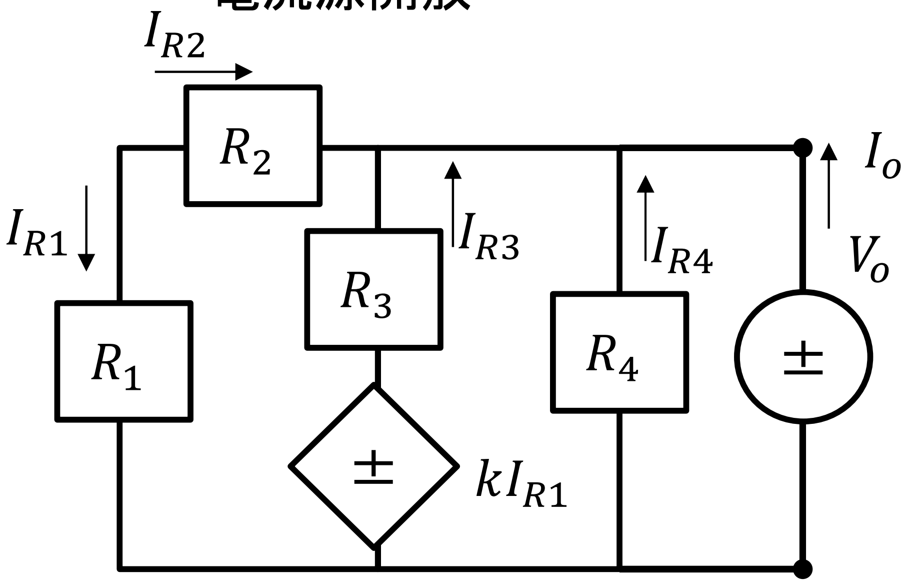
$$I_{R3} = \frac{kI_{R1}}{R_3} = \frac{kI_s}{R_3} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{sh} = I_{R2} + I_{R3} = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{kI_s}{R_3} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

テブナン・ノートン回路

例5

従属電源を評価するため出力に電圧源V_oを入れる
電流源開放



$$I_{R_1} = \frac{V_o}{R_1 + R_2} = -I_{R_2}$$

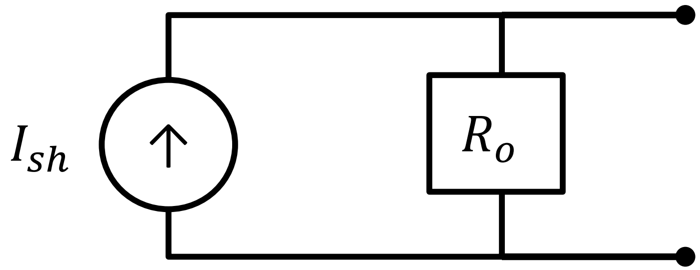
$$kI_{R1} = k\frac{V_o}{R_1 + R_2}$$

$$I_{R3} = \frac{kI_{R1} - V_o}{R_3} = \frac{k\frac{V_o}{R_1 + R_2} - V_o}{R_3}$$

$$I_{R4} = \frac{-V_o}{R_4}$$

$$I_o = -I_{R2} - I_{R3} - I_{R4} = \frac{V_o}{R_1 + R_2} - \frac{k\frac{V_o}{R_1 + R_2} - V_o}{R_3} + \frac{V_o}{R_4}$$

$$R_o = \frac{V_o}{I_o} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{\frac{-k}{R_1 + R_2} + 1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

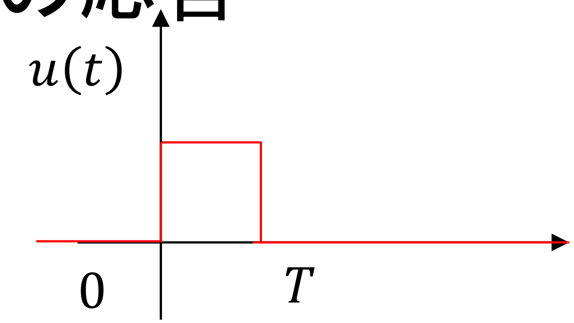


安定性と正実性

- 漸近安定:伝達関数の極が全て$Re[s] < 0$ (実部が負)
- 開放安定:1ポート回路の駆動点インピーダンス$Z(s)$の極が全て$Re[s] < 0$
  - 入力:電流, 出力:電圧
- 短絡安定: 1ポート回路の駆動点アドミタンス$Y(s)$の極が全て$Re[s] < 0$
  - 入力:電圧, 出力:電流

安定性

- インピーダンスの$Z(s)$の極が全て$Re[s] < 0$
  - 1ポート回路を電流源$u(t)$で駆動
    - $u(t) = 0\ for\ t < 0, T < t$
    - $t < 0, T < t$で$u(t)$を開放
    - 有限継続時間の入力
  - 駆動点の電圧$v(t)$の応答
    - $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$



安定性

- インピーダンスの$Z(s)$の極が全て$Re[s] < 0$
  - $Z(s) = a_m s^m + \cdots + a_0 + Z_1(s)$
    - $Z_1(s) = \sum \frac{L_i}{s - p_i}$
  - 電圧の応答
    - $V(s) = Z(s)U(s) = (a_m s^m + \cdots + a_0)U(s) + Z_1(s)U(s)$
      - $\mathcal{L}^{-1}[(a_m s^m + \cdots + a_0)U(s)] = a_m u^{(m)}(t) + \cdots + a_0 u(t)$
        - $\lim_{t \to \infty} u^{(m)} = 0$
      - $\mathcal{L}^{-1}[Z_1(s)U(s)] = \sum L_i \int_{0^-}^{t^+} e^{p_i(t-\tau)} 1_+(t-\tau)u(\tau)d\tau = \sum L_i e^{p_i t} \int_{0^-}^{T} e^{-p_i \tau} u(\tau)d\tau$
        - $\lim_{t \to \infty} e^{-p_i t} = 0$

正実関数

- 正実関数とは複素閉右半面$\mathrm{Re}[s] \geq 0$を複素閉右半面$\mathrm{Re}[Z(s)] \geq 0$に写像する複素関数
  - 正実関数$V(s), W(s)$の非負係数α,βによる一次結合$\alpha V(s) + \beta W(s)$も正実関数
  - 正実関数$W(s)$の$\dfrac{1}{W(s)}$も正実関数
    - $\mathrm{Re}\left[\dfrac{1}{W(s)}\right] = \mathrm{Re}\left[\dfrac{W^*(s)}{W(s)W^*(s)}\right] = \dfrac{\mathrm{Re}[W^*(s)]}{|W(s)|^2} = \dfrac{\mathrm{Re}[W(s)]}{|W(s)|^2} \geq 0$
  - RLCM回路の駆動点インピーダンス，アドミタンスは正実関数

RLCM回路の駆動点インピーダンスの性質

- RLCM回路の駆動点インピーダンス$W(s)$
  - $\mathrm{Re}[W(s)] \geq 0 \forall \mathrm{Re}[s] \geq 0$
  - $W(s)$は実係数有理関数
  - $W(s)$は正実関数
  - テレゲン定理より$Z(s), Y(s)$は上記の性質を持つ
    - 電力の和が0: $\sum_k v_k(t)\, i_k(t) = 0$
    - $I(s)V^*(s) = \sum_k I_k(s)\, {V_k}^*(s)$
    - $\mathrm{Re}[I(s)V^*(s)] = \mathrm{Re}[\sum_k I_k(s)\, {V_k}^*(s)] \geq 0$
    - $V(s) = Z(s)I(s) \qquad I(s) = Y(s)V(s)$
    - $\mathrm{Re}[I(s)V^*(s)] = \mathrm{Re}[Z(s)]|I(s)|^2 = \mathrm{Re}[Y(s)]|V(s)|^2$
    - $I(s)I^*(s) = |I(s)|^2 \quad V(s)V^*(s) = |V(s)|^2$