回路とシステム
第12回
2ポート回路

舟木　剛

2023年12月25日2限

講義計画

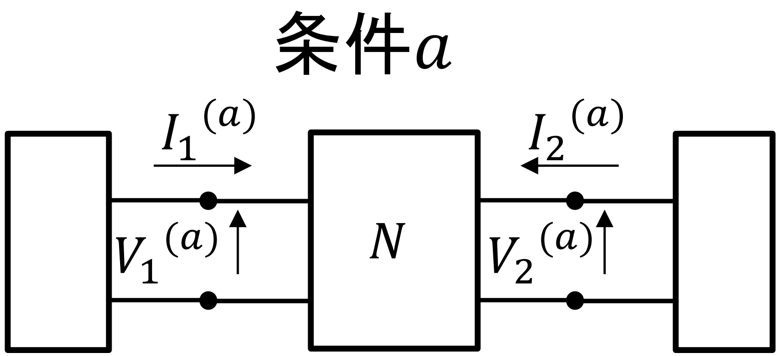
- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

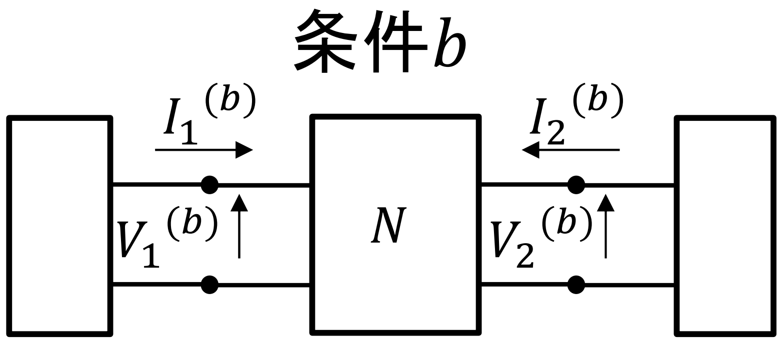
テレゲン定理

- 各枝電流と枝電圧の積の総和が0になる。
$\sum_{i=1}^{N} V_i I_i = 0$
- 非時間依存
  - 異なる時間t_1, t_2に対して成立する
  - $\sum_{i=1}^{N} V_i(t_1) I_i(t_2) = 0$
- 非素子依存
  - 回路が異なる条件a, bの動作に対して成立する
  - $\sum_{i=1}^{N} {V_i}^a {I_i}^b = 0, \sum_{i=1}^{N} {V_i}^b {I_i}^a = 0$

相反2ポート回路

- 相反条件
  - 異なる条件a, bで動作しているポート電流$\boldsymbol{I}^{(a)}$, $\boldsymbol{I}^{(b)}$とポート電圧$\boldsymbol{V}^{(a)}, \boldsymbol{V}^{(b)}$の積和が一致する
    - $\boldsymbol{I}^{(a)}(s)^T \boldsymbol{V}^{(b)}(s) = \boldsymbol{I}^{(b)}(s)^T \boldsymbol{V}^{(a)}(s)$
    - 内部の電圧・電流に依らない
    - 相反2ポート回路
      - ${I_1}^{(a)}{V_1}^{(b)} + {I_2}^{(a)}{V_2}^{(b)} = {I_1}^{(b)}{V_1}^{(a)} + {I_2}^{(b)}{V_2}^{(a)}$





相反2ポート回路

- 相反2ポート回路のインピーダンス行列$\boldsymbol{Z}$表現
  - $\boldsymbol{I}^{(a)}(s)^T\boldsymbol{Z}(s)\boldsymbol{I}^{(b)}(s)=\boldsymbol{I}^{(b)}(s)^T\boldsymbol{Z}(s)\boldsymbol{I}^{(a)}(s)$
  - ${V_i}^{(b)}=\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_j}^{(b)}$
  - $P=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(a)}{V_i}^{(b)}=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(a)}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_j}^{(b)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_i}^{(a)}{I_j}^{(b)}$
  - ${V_i}^{(a)}=\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}{I_j}^{(a)}$
  - $P=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(b)}{V_i}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n} {I_i}^{(b)}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_j}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}{I_i}^{(b)}{I_j}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ji}{I_i}^{(a)}{I_j}^{(b)}$
  - 任意の$\boldsymbol{I}^{(a)}(s), \boldsymbol{I}^{(b)}(s)$について成り立つ
    - $Z_{ij}=Z_{ji}$ → 対称行列$\boldsymbol{Z}^T=\boldsymbol{Z}$

相反2ポート回路

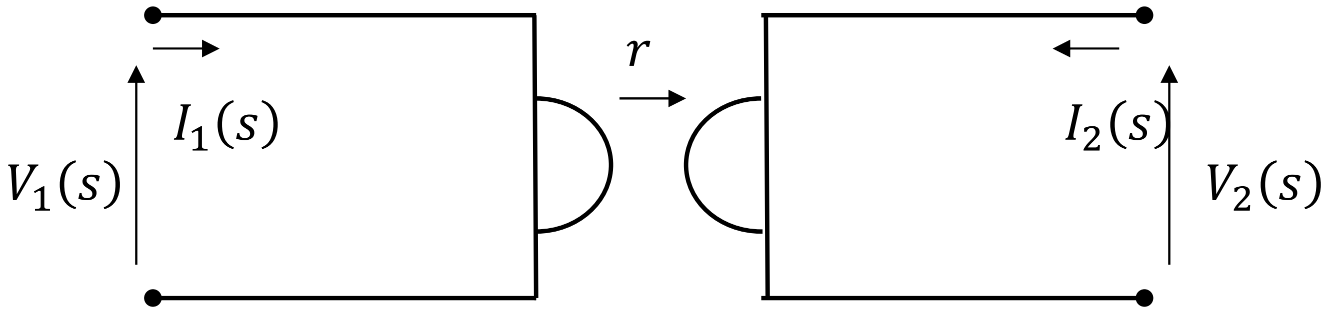
- 必要十分条件
  - $z_{ij} = z_{ji}$ → 伝達インピーダンスが等しい
  - $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$より
    - $y_{12} = y_{21}$ → 伝達アドミタンスが等しい
  - $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \det\mathbf{Z} & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$より
    - $h_{12} = -h_{21}$ → 電圧伝達関数と電流伝達関数が等しい

相反2ポート回路

- 必要十分条件
  - $\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C}\begin{bmatrix} A & \mathrm{det}\boldsymbol{F} \\ 1 & D \end{bmatrix}$より
    - $\mathrm{det}\boldsymbol{F} = AD - BC = 1$
- 線形時不変RLC回路のテレゲン定理
  - $I_1{}^{(a)}V_1{}^{(b)} + I_2{}^{(a)}V_2{}^{(b)} = \sum_{内部枝} I_k{}^{(a)}V_k{}^{(b)} = \sum_{内部枝} I_k{}^{(a)}Z_k I_k{}^{(b)} = \sum_{内部枝} V_k{}^{(a)}I_k{}^{(b)} = V_1{}^{(a)}I_1{}^{(b)} + V_2{}^{(a)}I_2{}^{(b)}$

非相反回路

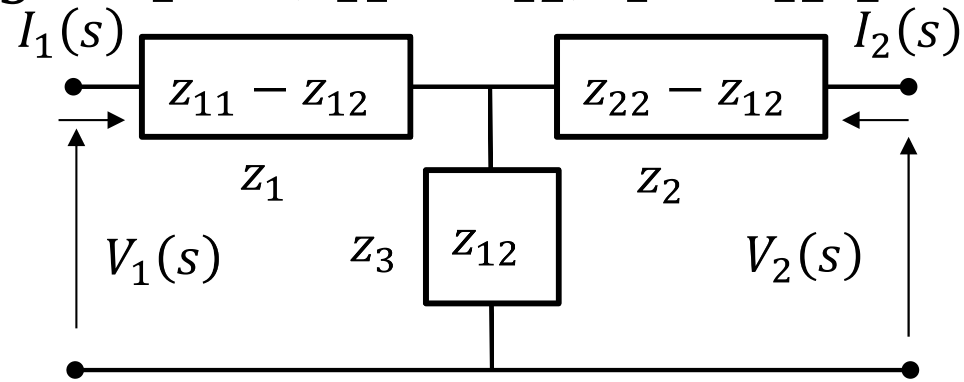
- ジャイレータ
  - インピーダンスを反転させる回路
  - $V_1 = -rI_2 \quad V_2 = rI_1$
  - $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$



等価回路表現

相反2ポート回路のT型等価回路

- $z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3 \quad V_1 = (z_{11} - z_{12})I_1 + z_{12}I_1 = z_{11}I_1$
- $z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_3 \qquad V_2 = z_{12}I_1 + (z_{22} - z_{12})I_2 = z_{12}I_1$
- $z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3 \quad V_2 = (z_{22} - z_{12})I_2 + z_{12}I_2 = z_{22}I_2$
- $z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_3 \quad V_1 = (z_{11} - z_{12})I_1 + z_{12}I_2 = z_{12}I_2$



等価回路

2ポート回路の相反条件

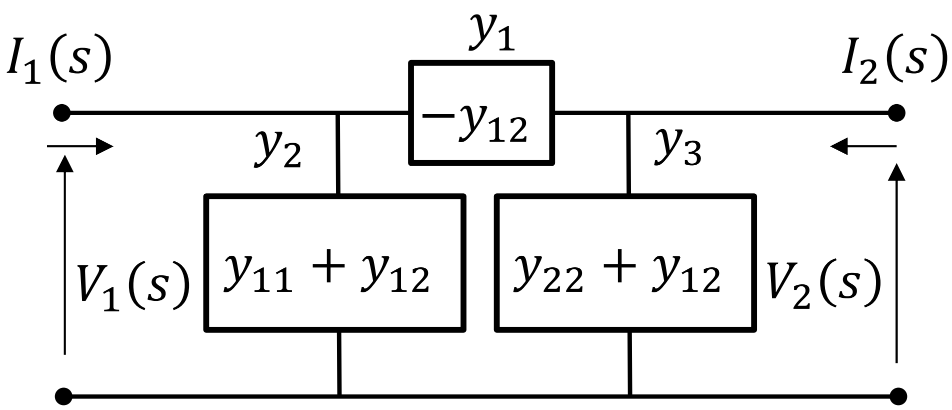
$z_{12} = z_{21}$

相反2ポート回路のπ型等価回路

- $y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = Y_1 + Y_2$ $\qquad I_1 = (y_{11} + y_{12})V_1 - y_{12}V_1 = y_{11}V_1$
- $y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = -Y_1$ $\qquad I_2 = (y_{22} + y_{12})V_2 - y_{12}(0 - V_1) = y_{12}V_1$
- $y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = Y_1 + Y_3$ $\qquad I_2 = -y_{12}V_2 + (y_{22} + y_{12})V_2 = y_{22}V_2$
- $y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = -Y_1$ $\qquad I_1 = (y_{11} + y_{12})V_1 - y_{12}(0 - V_2) = y_{12}V_2$

2ポート回路の相反条件

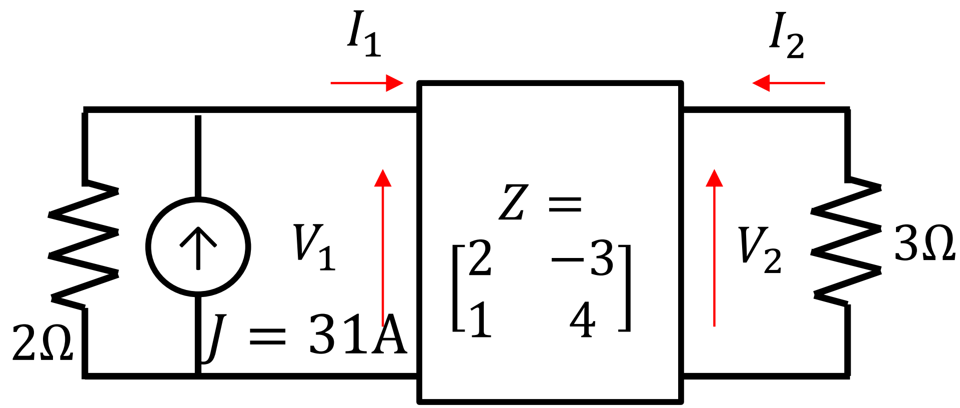
$y_{12} = y_{21}$



等価回路

2ポート回路を用いた解析例

- 各ポート電圧・電流を求める
- Z行列
  - $V_1 = 2I_1 - 3I_2$
  - $V_2 = I_1 + 4I_2$
- ポート1に接続された電流源と抵抗の並列回路
  - $J = 31\mathrm{A}$
    - $I_1 = J - \frac{V_1}{2} = 31 - \frac{V_1}{2}$
- ポート2に接続された抵抗
  - $I_2 = -\frac{V_2}{3}$
    - $V_2 = I_1 + 4I_2 = I_1 - \frac{4V_2}{3}$
    - $I_1 = \frac{7V_2}{3} = \frac{7}{3}(I_1 + 4I_2)$
    - $3I_1 = 7(I_1 + 4I_2)$
    - $-4I_1 = 7(4I_2)$
    - $-I_1 = 7I_2$
    - $I_2 = \frac{-I_1}{7}$

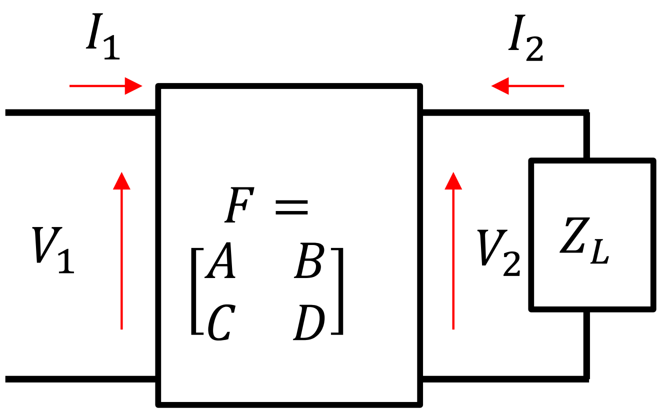


2ポート回路を用いた解析例

- $V_1 = 2I_1 - 3I_2 = 2I_1 + \frac{3I_1}{7} = \frac{17I_1}{7} = \frac{17}{7}\left(31 - \frac{V_1}{2}\right)$
- $7V_1 = 17\left(31 - \frac{V_1}{2}\right)$
- $\frac{31V_1}{2} = 17 \times 31$
- $V_1 = 34$
- $I_1 = 31 - \frac{34}{2} = 14$
- $V_2 = I_1 + 4I_2 = I_1 - \frac{4I_1}{7} = \frac{3I_1}{7}$
- $V_2 = \frac{3\times 14}{7} = 6$
- $I_2 = \frac{-14}{7} = -2$

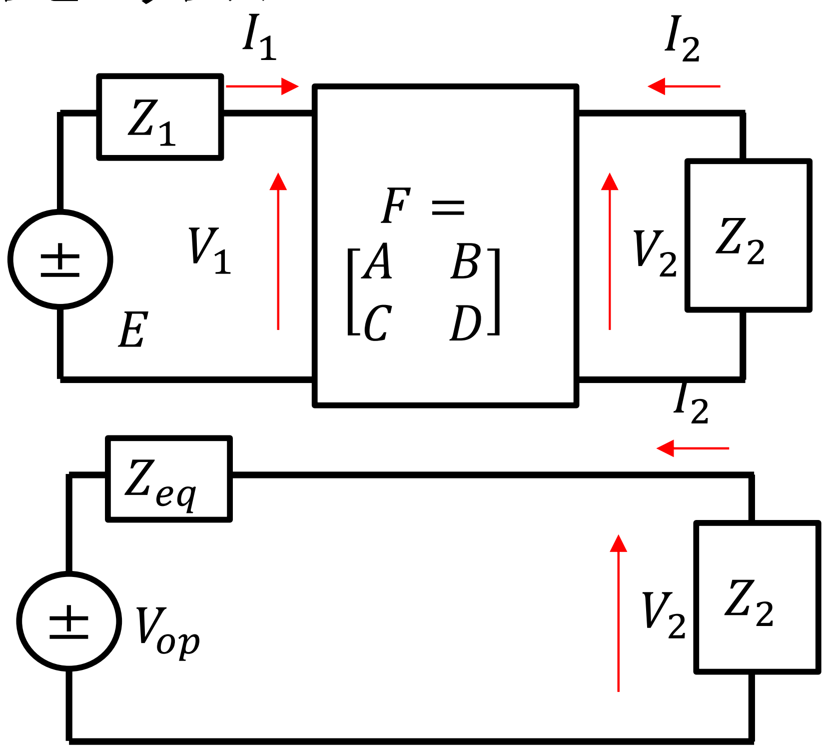
2ポート回路を用いた解析例

- 入力インピーダンスを求める
- 負荷インピーダンスZ_L
  - $V_2 = -I_2 Z_L$
- F行列
  - $V_1 = AV_2 - BI_2$
    - $V_1 = -AZ_L I_2 - BI_2 = -(AZ_L + B)I_2$
  - $I_1 = CV_2 - DI_2$
    - $I_1 = -CZ_L I_2 - DI_2 = -(CZ_L + D)I_2$
- 入力インピーダンス
    - $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{-(AZ_L+B)I_2}{-(CZ_L+D)I_2} = \frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}$



2ポート回路を用いた解析例

- F行列とポート①側の回路に対するテブナン等価回路を求める
  - ポート②開放$I_2 = 0$における電圧源と直列インピーダンス
    - $V_1 = AV_2 - BI_2 = AV_2$
    - $I_1 = CV_2 - DI_2 = CV_2$
      - $\frac{V_1}{I_1} = \frac{A}{C}$
    - $V_1 = E - I_1 Z_1 = E - \frac{C}{A} V_1 Z_1$
    - $V_1 = \frac{A}{A+CZ_1} E \rightarrow \ V_{op} = V_2 = \frac{E}{A+CZ_1}$
  - ポート②短絡$V_2 = 0$における電流I_2
    - $V_1 = AV_2 - BI_2 = -BI_2$
    - $I_1 = CV_2 - DI_2 = -DI_2$
      - $\frac{V_1}{I_1} = \frac{B}{D}$
    - $I_1 = \frac{E-V_1}{Z_1} = \frac{E-\frac{B}{D}I_1}{Z_1} = \frac{E}{Z_1} - \frac{BI_1}{DZ_1}$
    - $I_1 = \frac{D}{B+DZ_1} E \rightarrow \ I_{sh} = I_2 = \frac{-E}{B+DZ_1}$



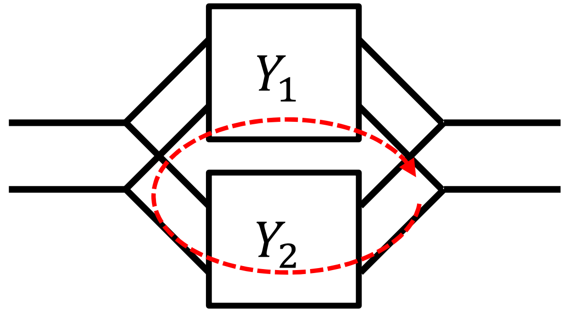
$$Z_{eq} = \frac{V_{op}}{-I_{sh}} = \frac{\frac{E}{A+CZ_1}}{\frac{E}{B+DZ_1}} = \frac{B+DZ_1}{A+CZ_1}$$

相互接続

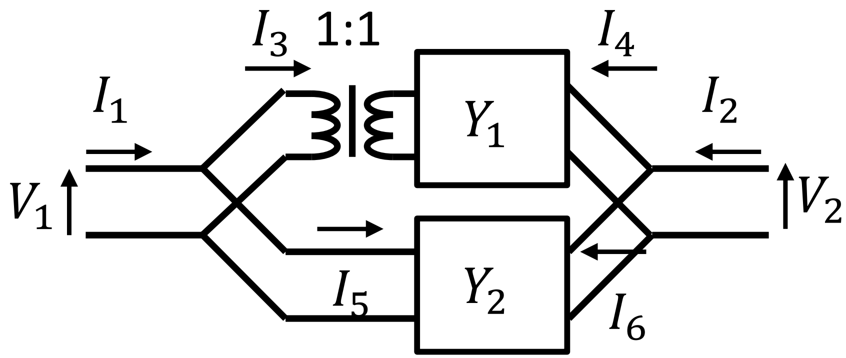
- 2つの2ポート回路
  - 並列接続
  - 直列接続
  - 直並列接続
  - 並直列接続
  - 縦続接続

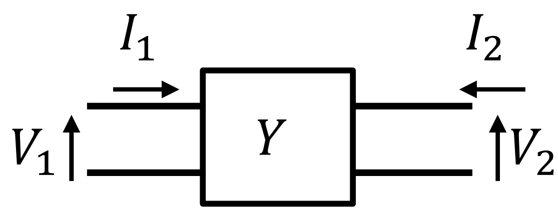
並列接続

- アドミタンス行列表現
  - 合成回路Y
  - 部分回路Y_1, Y_2
- ポート条件を満たすため
  - 部分回路Y_1, Y_2
    - 理想変成器を使用
      - 一次側，二次側共に満たす
  - 部分回路が満たすため
    合成回路Yも満たす



ループ電流が流れる
→ポート条件不成立





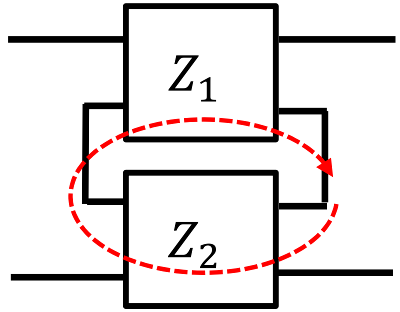
並列接続

- KCL
  - $I_1 = I_3 + I_5$
  - $I_2 = I_4 + I_6$
- アドミタンス行列
  - $\begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = Y_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = Y_2 \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
- 合成2ポート回路のアドミタンス行列
  - $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$
    $= Y_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + Y_2 \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
    $= (Y_1 + Y_2) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
  - $Y = Y_1 + Y_2$

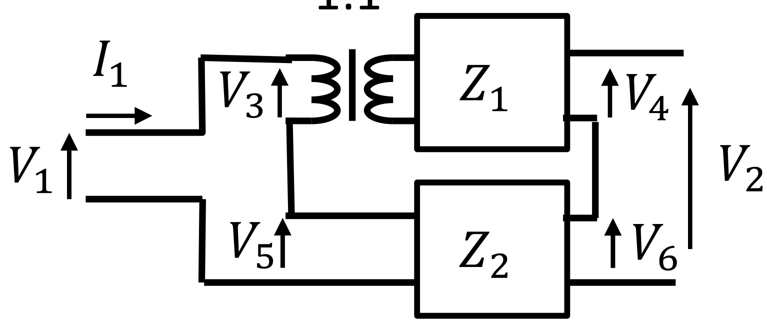
並列接続された合成2ポート回路のアドミタンス行列Yは部分回路のアドミタンス行列Y_1, Y_2の和となる

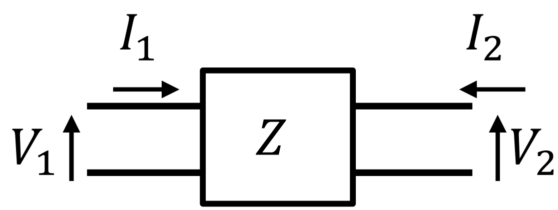
直列接続

- インピーダンス行列表現
  - 合成回路Z
  - 部分回路Z_1, Z_2
- ポート条件を満たすため
  - 部分回路Z_1, Z_2
    - 理想変成器を使用
      - 一次側，二次側共に満たす
  - 部分回路が満たすため合成回路Zも満たす



ループ電流が流れる
→ポート条件不成立





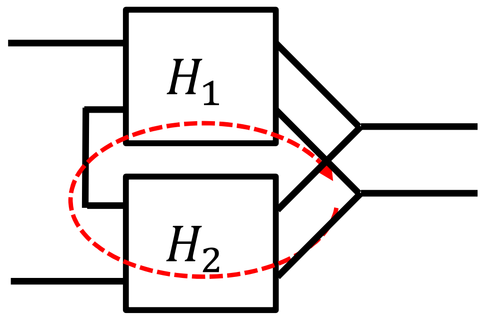
直列接続

- KVL
  - $V_1 = V_3 + V_5$
  - $V_2 = V_4 + V_6$
- インピーダンス行列
  - $\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = Z_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = Z_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
- 合成2ポート回路のインピーダンス行列
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}$
    $= Z_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + Z_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    $= (Z_1 + Z_2) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
  - $Z = Z_1 + Z_2$

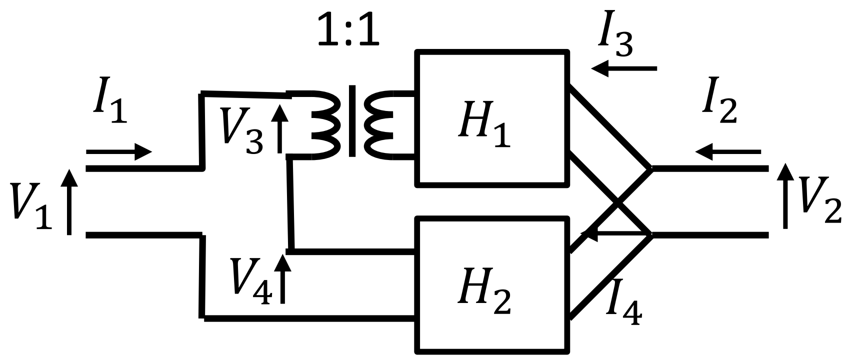
直列接続された合成2ポート回路のインピーダンス行列Zは部分回路のインピーダンスアドミタンス行列Y_1, Y_2の和となる

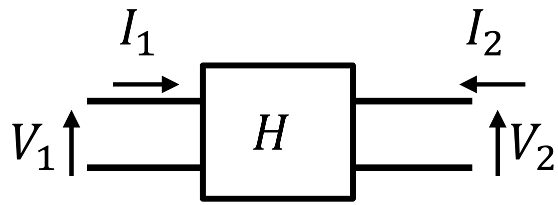
直並列接続

- ハイブリッド行列表現
  - 一次側直列接続
  - 二次側並列接続
  - 合成回路H
  - 部分回路H_1, H_2
- ポート条件を満たすため
  - 部分回路H_1, H_2
    - 理想変成器を使用
      - 一次側，二次側共に満たす
  - 部分回路が満たすため
    合成回路Hも満たす



ループ電流が流れる
→ポート条件不成立





直並列接続

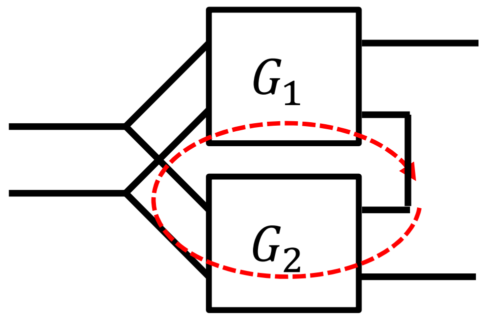
- KVL
  - $V_1 = V_3 + V_4$
- KCL
  - $I_2 = I_3 + I_4$
- ハイブリッド行列
  - $\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = H_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} V_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

- 合成2ポート回路のハイブリッド行列
  - $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_4 \\ I_4 \end{bmatrix}$
    $= H_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + H_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
    $= (H_1 + H_2) \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
  - $H = H_1 + H_2$

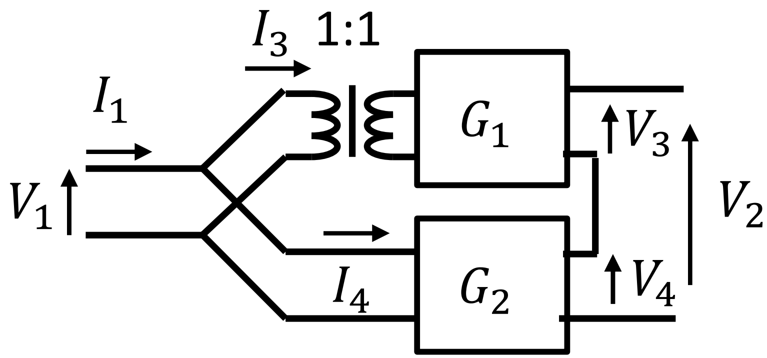
直並列接続された合成2ポート回路のハイブリッド行列Hは部分回路のハイブリッド行列H_1, H_2の和となる

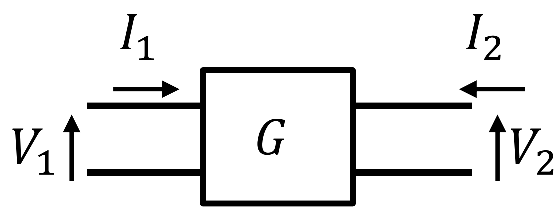
並直列接続

- 逆ハイブリッド行列表現
  - 一次側並列接続
  - 二次側直列接続
  - 合成回路G
  - 部分回路G_1, G_2
- ポート条件を満たすため
  - 部分回路G_1, G_2
    - 理想変成器を使用
      - 一次側，二次側共に満たす
  - 部分回路が満たすため合成回路Gも満たす



ループ電流が流れる
→ポート条件不成立





並直列接続

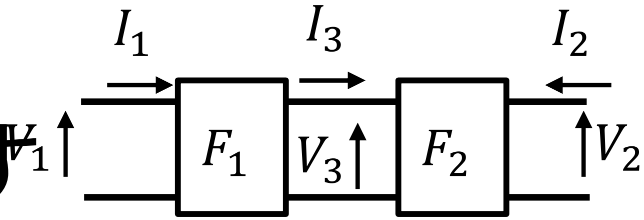
- KCL
  - $I_1 = I_3 + I_4$
- KVL
  - $V_2 = V_3 + V_4$
- 逆ハイブリッド行列
  - $\begin{bmatrix} I_3 \\ V_3 \end{bmatrix} = G_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} I_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = G_2 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

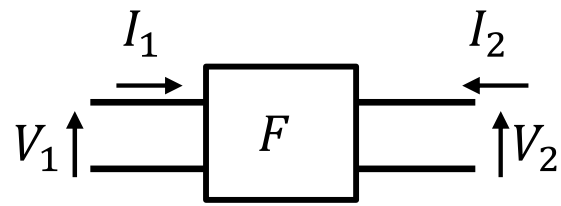
- 合成2ポート回路の逆ハイブリッド行列
  - $\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_4 \\ V_4 \end{bmatrix}$
    $= G_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + G_2 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
    $= (G_1 + G_2) \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
  - $G = G_1 + G_2$

並直列接続された合成2ポート回路の逆ハイブリッド行列Gは部分回路のハイブリッド行列G_1, G_2の和となる

縦続接続

- 2ポート回路を鎖状に接続
  - 縦続接続
- 部分回路がポート条件を満たす
  - 理想変成器は不要





- $\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = F_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = F_2 F_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$
- $F = F_1 F_2$

縦続接続された合成2ポート回路の伝送行列Fは部分回路の伝送行列F_1, F_2の積となる

相互接続例

- アドミタンス行列
  - $y_{1-11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{R_1}$
  - $y_{1-22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{1}{R_1}$
  - $y_{1-21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-1}{R_1}$
  - $y_{1-12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-1}{R_1}$
  - $y_{2-11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{R_2}$
  - $y_{2-22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{1}{R_2}$
  - $y_{2-21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-1}{R_2}$
  - $y_{2-12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-1}{R_2}$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} \\ \frac{-1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{-1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$