回路とシステム
第14回
三相回路
状態方程式

舟木　剛

2024年1月22日2限

講義計画

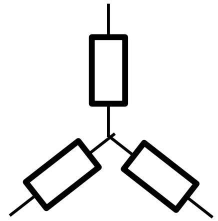
- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

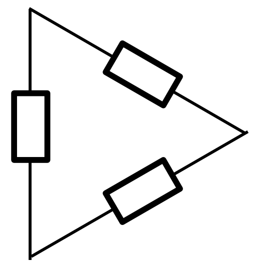
多相交流回路

- 複数の交流電源が回路に同時に存在
  - n個存在→n 相式
  - 周波数が同じ
  - 位相が異なる
  - その他の条件
    - 対称多相方式(平衡)
      - n個の起電力の大きさが等しく，位相差が等間隔
    - 非対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが一致しない，または位相差が等間隔でない

多相交流の結合方式

- 独立多相方式　各相が結合されていない
- 結合多相方式　各相が結合されている
  - 平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が一定
  - 不平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が脈動する
  - 星形結線　各相の終端が共通
    - 三相Y結線
  - 環状結線　各相の終端を次相の始端に接続
    - 三相Δ結線





対称多相交流

- 対称n相交流の起電力の瞬時値
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)$
  - $e_n = E_m \sin\left(\omega t - \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)$
    - E_m:振幅
    - ω:角周波数
    - $\frac{2\pi}{n}$:位相差
- ベクトル表記
  - $E_a = E$
  - $E_b = E e^{-j\frac{2\pi}{n}} = E\left(\cos\frac{2\pi}{n} - j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$
  - $E_n = E e^{-j\frac{n-1}{n}2\pi} = E\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi - j\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right)$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}$
    - $E_a = E$
    - $E_b = a^{-1}E$
    - $E_n = a^{-(n-1)}E$

単相交流回路の瞬時電力

- 電圧:$v(t) = V \sin \omega t$
- 電流:$i(t) = I \sin(\omega t + \theta)$
- 電力:$p(t) = v(t)i(t)$

$$= VI \sin \omega t \sin(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{VI}{2}\{\cos \theta - \cos(2\omega t + \theta)\}$$

  - 直流成分:$\frac{VI}{2}\cos \theta$
  - 変動成分:$\frac{-VI}{2}\cos(2\omega t + \theta)$

電圧・電流位相がずれると
有効電力が減少する

単相交流の電力は一定でない
2倍の周波数で変化する

三相平衡交流回路の瞬時電力

- A相
  - 電圧:$v_a(t) = V \sin \omega t$
  - 電流:$i_a(t) = I \sin(\omega t + \theta)$
  - 電力:$p_a(t) = \frac{VI}{2}\{\cos\theta - \cos(2\omega t + \theta)\}$
- B相
  - 電圧:$v_b(t) = V \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電流:$i_b(t) = I \sin\left(\omega t + \theta - \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電力:$p_b(t) = \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$
- C相
  - 電圧:$v_c(t) = V \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電流:$i_c(t) = I \sin\left(\omega t + \theta + \frac{2}{3}\pi\right)$
  - 電力:$p_c(t) = \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta + \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$

三相平衡交流回路の瞬時電力

- 三相の合計電力
  - $p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$

$$= \frac{VI}{2}\{\cos\theta - \cos(2\omega t + \theta)\}$$
$$+ \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$$
$$+ \frac{VI}{2}\left\{\cos\theta - \cos\left(2\omega t + \theta + \frac{4}{3}\pi\right)\right\}$$
$$= \frac{3VI}{2}\cos\theta$$

  - $\cos(2\omega t + \theta) + \cos\left(2\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(2\omega t + \theta + \frac{4}{3}\pi\right) = 0$
  - 三相平衡交流では電力は一定になる
  - 不平衡では2倍の周波数の変動成分が現れる

状態方程式

- 線形時不変回路
  - 状態方程式
    - 一階連立微分方程式による回路方程式
    - $\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j(t)$
      - $x_i(t)$:状態変数$(i = 1 \cdots n)$※電圧，電流
      - $u_i(t)$:独立電源$(i = 1 \cdots m)$
  - 出力方程式
    - $y_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} d_{kj}u_j(t)$
      - $y_i(t)$:観測変数$(i = 1 \cdots p)$

状態方程式

- 状態変数のベクトル表記
  - $\dot{\boldsymbol{x}}^T = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n]$
  - $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$
  - $\boldsymbol{u}^T = [u_1, u_2, \cdots, u_m]$
  - $\boldsymbol{y}^T = [y_1, y_2, \cdots, y_p]$
- 係数行列
  - $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ $n \times n$
  - $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ $n \times m$
  - $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ $p \times n$
  - $\boldsymbol{D} = [d_{ij}]$ $p \times m$
- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - 未来の状態がわかる
- 出力方程式
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$
  - 現在の出力がわかる

状態方程式の解

- 時間領域
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ $\boldsymbol{A}: n \times n$, $\boldsymbol{B}: n \times m$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$ $\boldsymbol{C}: p \times n$, $\boldsymbol{D}: p \times m$
  - 状態変数:$\boldsymbol{x}(t)$
  - 入力変数:$\boldsymbol{u}(t)$
  - 出力変数:$\boldsymbol{y}(t)$
- s領域
  - $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s)$
  - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

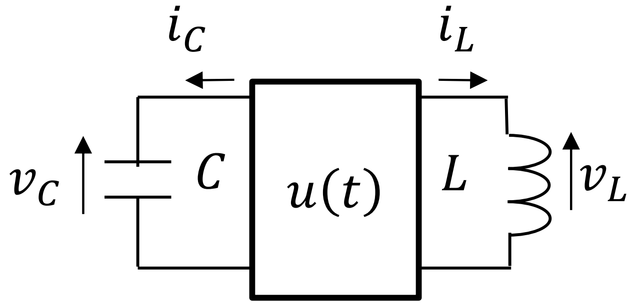
- 行列表現
  - $(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}(0^-)+\boldsymbol{BU}(s)$
  - $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s)$
    $=\boldsymbol{C}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(s)]+\boldsymbol{DU}(s)$
    $=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$
    - 零入力応答$\boldsymbol{U}(s)=0$　$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$
    - 零状態応答$\boldsymbol{x}(0^-)=0$　$[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$

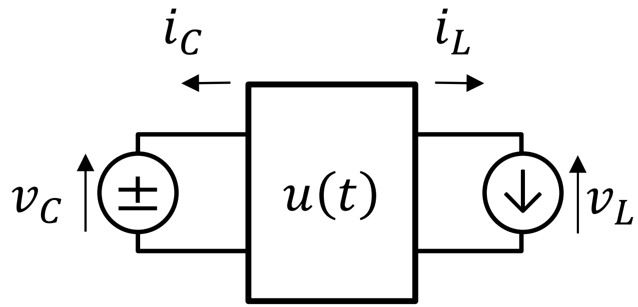
状態方程式

- 利点
  - 計算機に実装しやすい(行列計算)
  - 安定性判別等の解析が容易(固有値計算)
  - 時変系，非線形系への対応が可能
  - 回路内部状態の応答がわかる

状態方程式

- 抵抗と独立電源から成る回路$u(t)$に接続されたコンデンサ・リアクトルの電圧・電流応答
  - $C\frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t)$
  - $L\frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t)$
- 状態方程式を求めるための等価回路
  - 代入定理の適用
    - コンデンサを独立電圧源v_C
    - リアクトルを独立電流源i_L



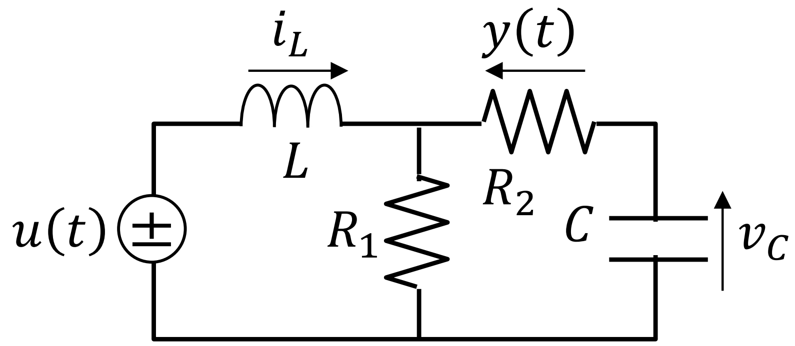


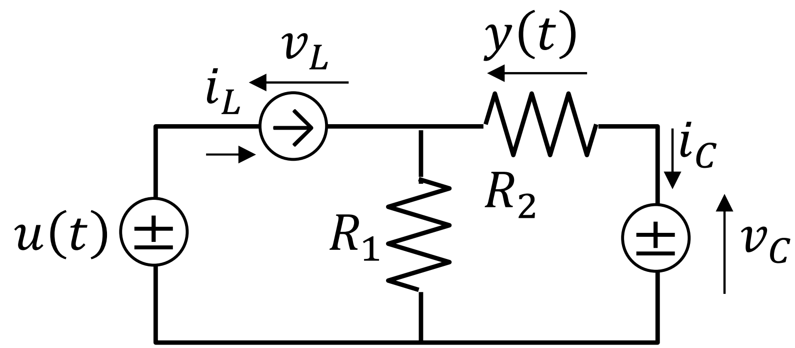
状態方程式

- 外部電源v_C, i_Lと内部電源uにより決まるi_C, v_Lを重ね合わせの理で表す
  - $\begin{cases} i_C(t) = a'_{11}v_C(t) + a'_{12}i_L(t) + \ b'_1u(t) \\ v_L(t) = a'_{21}v_C(t) + a'_{22}i_L(t) + \ b'_2u(t) \end{cases}$
  - $\begin{cases} C\dfrac{dv_C(t)}{dt} = a'_{11}v_C(t) + a'_{12}i_L(t) + \ b'_1u(t) \\ L\dfrac{di_L(t)}{dt} = a'_{21}v_C(t) + a'_{22}i_L(t) + \ b'_2u(t) \end{cases}$
  - $\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{a'_{11}}{C}v_C(t) + \dfrac{a'_{12}}{C}i_L(t) + \dfrac{b'_1}{C}u(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{a'_{21}}{L}v_C(t) + \dfrac{a'_{22}}{L}i_L(t) + \dfrac{b'_2}{L}u(t) \end{cases}$

状態方程式例題

- 例題
  - KVL
    - $-u + v_L + R_1(i_L - i_C) = 0$
    - $R_2 i_C + v_C - R_1(i_L - i_C) = 0$
  - 動特性
    - $v_L = L\frac{di_L}{dt}$
    - $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$
  - 状態方程式
    - $\begin{cases} -u + L\frac{di_L}{dt} + R_1\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0 \\ R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C - R_1\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0 \end{cases}$
  - 出力方程式
    - $y = R_2 i_C$





状態方程式例題

- $\begin{cases} L\frac{di_L}{dt} - R_1C\frac{dv_C}{dt} = -R_1 i_L + u \\ (R_1+R_2)C\frac{dv_C}{dt} = R_1 i_L - v_C \end{cases}$
- $\begin{bmatrix} L & -R_1C \\ 0 & (R_1+R_2)C \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} L & -R_1C \\ 0 & (R_1+R_2)C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} (R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} (R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix} =$
  $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} -R_1(R_1+R_2)C + {R_1}^2C & -R_1C \\ R_1L & -L \end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} -R_1R_2C & -R_1C \\ R_1L & -L \end{bmatrix} =$
  $\frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}$

状態方程式例題

- $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix}(R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u \\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix}(R_1+R_2)Cu \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{u}{L} \\ 0\end{bmatrix}$
- $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_L \\ v_C\end{bmatrix} = \frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}-\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L \\ v_C\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{u}{L} \\ 0\end{bmatrix}$
- 出力方程式
  - $y = R_2 i_C = R_2 C\frac{dv_C}{dt} = \frac{R_2C}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}\frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L \\ v_C\end{bmatrix} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}R_1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L \\ v_C\end{bmatrix}$