

パワーエレクトロニクス 第13回 DC-ACインバータ

2025年7月16日

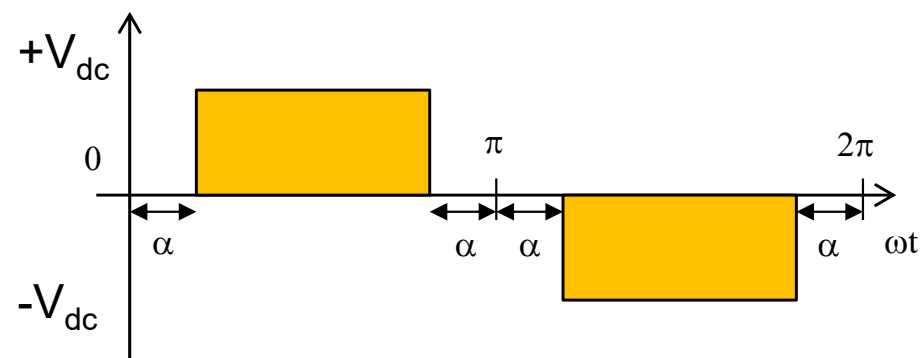
授業の予定

- パワーエレクトロニクス緒論
- パワーエレクトロニクスにおける基礎理論
- パワー半導体デバイス
- 整流回路
- 整流回路の交流側特性と他励式インバータ
- 交流電力制御とサイクロコンバータ
- 直流チョッパ
- DC-DCコンバータと共振形コンバータ
- 自励式インバータ
- 演習

出力電圧振幅と高調波の制御

- 基本波出力電圧は直流電圧で制御可
- パルス幅でも出力電圧制御可

- $\pm V_{dc}$ と0を使用
- 出力電圧が0となる期間 α
- 出力電圧実効値



- $$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_{dc}^2 d\omega t} = V_{dc} \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}$$

パルス幅による出力電圧制御

- 出力交流電圧の大きさ

- 基本波成分

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_{dc} \cos x \, dx + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} -V_{dc} \cos x \, dx \right\} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_{dc} \sin x \, dx + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} -V_{dc} \sin x \, dx \right\} = \frac{4V_{dc}}{\pi} \cos \alpha$$

- 高調波成分

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_{dc} \cos nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_{dc} \sin nx \, dx = \frac{4V_{dc}}{n\pi} \cos n\alpha$$

PWM制御

- 出力電流のTHDを低減する
- 出力基本波より高い周波数でスイッチング
 - 出力電圧を制御
 - 出力電圧のTHDは増加する
 - 高調波成分はフィルタで除去容易
- 欠点
 - 制御の複雑化
 - スwitchング損失増加
- 三角波比較方式
 - 信号波(変調波)と搬送波(三角波)を比較してパルス生成

PWM制御

- バイポーラ変調

- 変調波→正弦波: v_{sin}

- 搬送波→三角波: v_{tri}

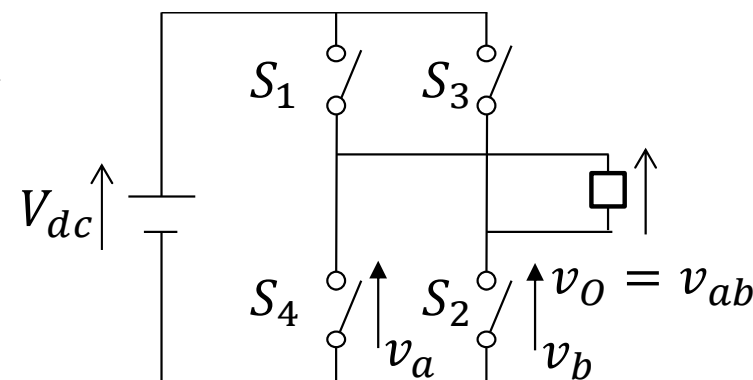
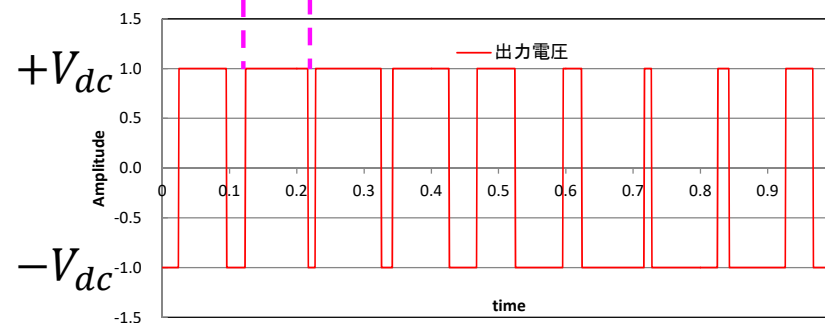
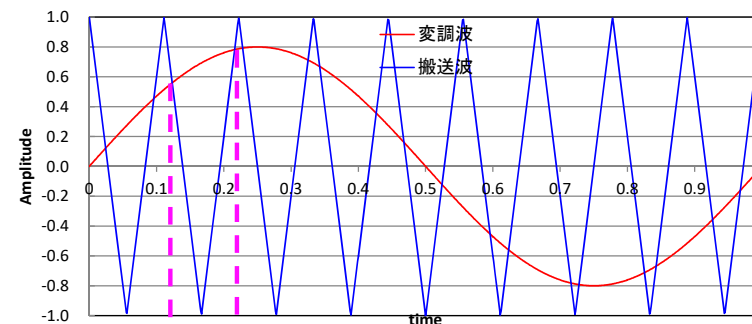
- 出力電圧

$$v_o = \begin{cases} +V_{dc} & (v_{sin} \geq v_{tri}) \\ -V_{dc} & (v_{sin} < v_{tri}) \end{cases}$$

- $\pm V_{dc}$ を出力するのでバイポーラ

- スイッチの状態

$$\begin{cases} ON: S_1, S_2 \rightarrow v_o = +V_{dc} \\ ON: S_3, S_4 \rightarrow v_o = -V_{dc} \end{cases}$$



PWM制御

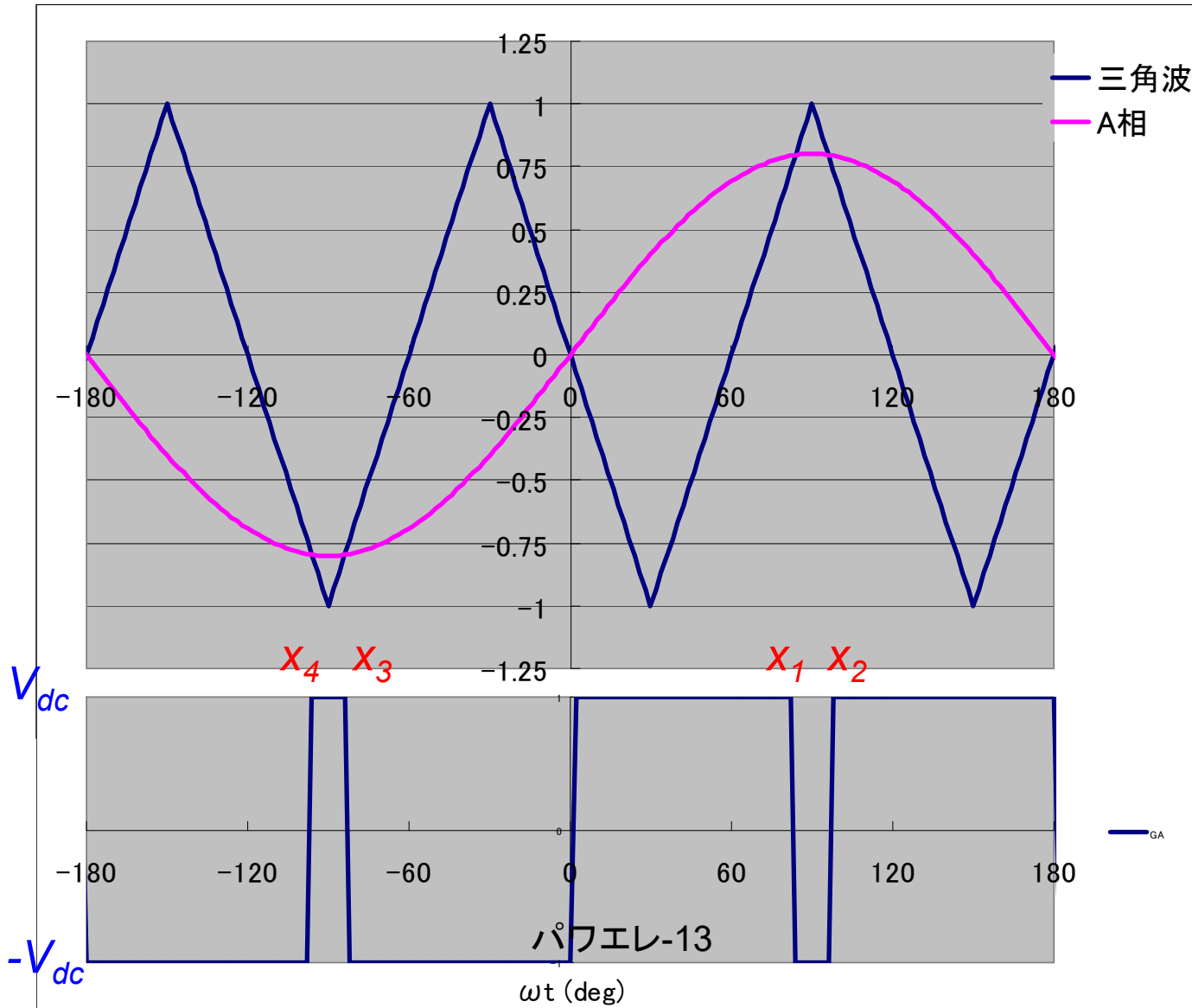
- 周波数変調比: $m_f = \frac{f_{carrier}}{f_{reference}} = \frac{f_{tri}}{f_{sin}}$
 - 搬送波と信号波の周波数の比
 - 比が大きいと高調波成分は高周波となる
- 振幅変調比: $m_a = \frac{V_{m,reference}}{V_{m,carrier}} = \frac{V_{m,sin}}{V_{m,tri}}$
 - 搬送波と信号波の振幅の比
 - $0 \leq m_a \leq 1$ では基本波振幅は m_a に比例する
 - $V_1 = m_a V_{dc}$
 - $1 < m_a$ では線形とならない(比例しない)

PWMによる出力電圧制御

- 同期PWM
 - 発生しようとする交流電圧に同期したパルスが発生
 - スwitchングの周波数は、基本波の整数倍
 - 基本波の整数倍の理論高調波が発生
 - 高調波除去フィルタの設計が容易
 - 比較的低いスitchング周波数で用いる
- 非同期PWM
 - 発生しようとする交流電圧の位相・周波数に同期しないゲート信号を生成
 - スitchングの周波数は、基本波の整数倍である必要がない
 - 発生する理論高調波が基本波の整数倍とは限らない
 - 比較的高いスitchング周波数で用いる
 - 低いスitchング周波数ではビートが発生

PWMによる出力電圧制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 3パルス同期PWM



波形の対称性

$$X_1 = -X_3$$

$$X_2 = -X_4$$

$$X_2 = \pi - X_1$$

PWMによる出力電圧制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 三角波と信号波(正弦波)との大小関係でパルスのオン・オフを決定
 - 三角波は ± 1
 - 信号波は振幅1以下
 - 3パルス同期PWM
 - 区間① $-\pi \sim -5/6\pi$ $y=6/\pi x+6$
 - 区間② $-5/6\pi \sim -\pi/2$ $y=-6/\pi x+4$
 - 区間③ $-\pi/2 \sim -\pi/6$ $y=6/\pi x+2$
 - 区間④ $-\pi/6 \sim \pi/6$ $y=-6/\pi x$
 - 区間⑤ $\pi/6 \sim \pi/2$ $y=6/\pi x-2$
 - 区間⑥ $\pi/2 \sim 5/6\pi$ $y=-6/\pi x+4$
 - 区間⑦ $5/6\pi \sim \pi$ $y=6/\pi x-6$

PWMによる出力電圧制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成

- 3パルス同期PWM

- フーリエ級数展開 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{ただし } a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left[-V_{dc} \sin nx \right]_{-\pi}^{x_4} + \left[V_{dc} \sin nx \right]_{x_4}^{x_3} + \left[-V_{dc} \sin nx \right]_{x_3}^0 \right\} \\ &\quad \left\{ + \left[V_{dc} \sin nx \right]_0^{x_1} + \left[-V_{dc} \sin nx \right]_{x_1}^{x_2} + \left[V_{dc} \sin nx \right]_{x_2}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V_{dc}}{n\pi} \left\{ \begin{aligned} &-\sin nx_4 + \sin(-n\pi) + \sin nx_3 - \sin nx_4 - \sin n0 + \sin nx_3 \\ &+ \sin nx_1 - \sin 0 - \sin nx_2 + \sin nx_1 + \sin n\pi - \sin nx_2 \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{V_{dc}}{n\pi} \left\{ \begin{aligned} &\sin nx_2 + 0 - \sin nx_1 + \sin nx_2 - 0 - \sin nx_1 \\ &+ \sin nx_1 - 0 - \sin nx_2 + \sin nx_1 + 0 - \sin nx_2 \end{aligned} \right\} = 0 \end{aligned}$$

PWMによる出力電圧制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 3パルス同期PWM
 - フーリエ級数展開

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left[V_{dc} \cos nx \right]_{-\pi}^{x_4} + \left[-V_{dc} \cos nx \right]_{x_4}^{x_3} + \left[V_{dc} \cos nx \right]_{x_3}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left[-V_{dc} \cos nx \right]_0^{x_1} + \left[V_{dc} \cos nx \right]_{x_1}^{x_2} + \left[-V_{dc} \cos nx \right]_{x_2}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V_{dc}}{n\pi} \left\{ \cos nx_4 - \cos(-n\pi) - \cos nx_3 + \cos nx_4 + \cos n0 - \cos nx_3 \right. \\ &\quad \left. - \cos nx_1 + \cos 0 + \cos nx_2 - \cos nx_1 - \cos n\pi + \cos nx_2 \right\} \\ &= \frac{V_{dc}}{n\pi} \left\{ \cos nx_2 - (-1)^n - \cos nx_1 + \cos nx_2 + 1 - \cos nx_1 \right. \\ &\quad \left. - \cos nx_1 + 1 + \cos nx_2 - \cos nx_1 - (-1)^n + \cos nx_2 \right\} \\ &= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ 2 \cos nx_2 - (-1)^n - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \end{aligned}$$

PWMによる出力電圧制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 3パルス同期PWM
 - フーリエ級数展開

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ 2 \cos nx_2 - (-1)^n - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \\&= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ 2 \cos n(\pi - x_1) - (-1)^n - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \\&= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ 2(\cos n\pi \cos nx_1 + \sin n\pi \sin nx_1) - (-1)^n - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \\&= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ 2[(-1)^n \cos nx_1 + 0 \sin nx_1] - (-1)^n - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \\&= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ 2(-1)^n \cos nx_1 - (-1)^n - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \\&= \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left\{ (-1)^n (2 \cos nx_1 - 1) - 2 \cos nx_1 + 1 \right\} \\&= \frac{2V_{dc}}{n\pi} [(-1)^n - 1](2 \cos nx_1 - 1)\end{aligned}$$

PWMによる出力電圧制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 3パルス同期PWM
 - フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_{dc}}{n\pi} \left[(-1)^n - 1 \right] (2 \cos nx_1 - 1) \sin nx$$

ただし、正弦波の振幅をAとすると

- 基本波の振幅

$$A \sin x_1 = \frac{6}{\pi} x_1 - 2$$

$$b_1 = \frac{2V_{dc}}{\pi} \left[(-1)^1 - 1 \right] (2 \cos x_1 - 1) = \frac{4V_{dc}}{\pi} (1 - 2 \cos x_1)$$

$$\frac{\pi}{4V_{dc}} b_1 = 1 - 2 \cos x_1$$

$$x_1 = \cos^{-1} \frac{2 - \pi b_1}{8V_{dc}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{6}{\pi} x_1 - 2}{\sin x_1} = \frac{\frac{6}{\pi} \cos^{-1} \frac{2 - \pi b_1}{8V_{dc}} - 2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 - \pi b_1}{8V_{dc}} \right)^2}} \Rightarrow b_1 \cong \frac{4V_{dc}}{\pi} A$$

PWMによる出力制御

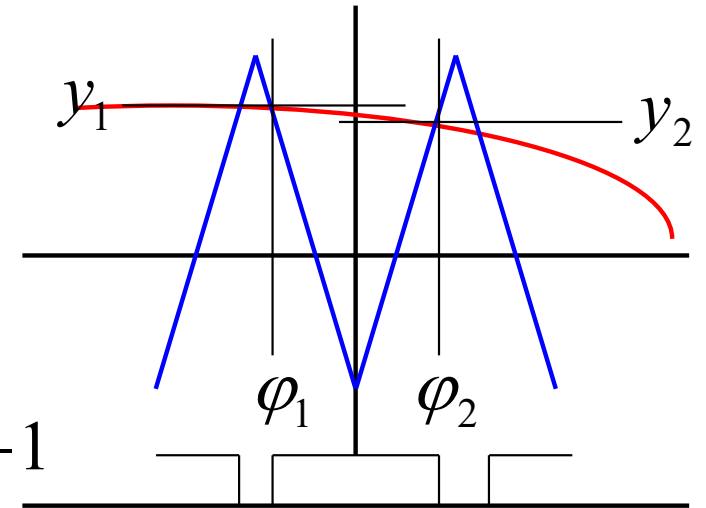
- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 多パルス, 同期・非同期対応

- 信号波

$$e_s = M \sin(\omega_s t + \gamma)$$

- 搬送波

$$\begin{cases} Y = -\frac{2}{\pi} X + \alpha & (-\pi + \delta \leq X \leq \delta) \\ Y = \frac{2}{\pi} X + \beta & (\delta \leq X \leq \pi + \delta) \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{2}{\pi} \delta - 1 \\ \beta = -\frac{2}{\pi} \delta - 1 \end{cases}$$



$Y = M \sin(y + \gamma)$ で信号波と搬送波が交わるとする 但し $y = \omega_s t$

$$\begin{cases} M \sin(y + \gamma) = -\frac{2}{\pi} \varphi_1 + \alpha \\ M \sin(y + \gamma) = \frac{2}{\pi} \varphi_2 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} (M \sin(y + \gamma) - \alpha) \\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2} (M \sin(y + \gamma) - \beta) \end{cases}$$

- ゲート信号は搬送波と信号波の関数で表される $G(\omega_s t, \omega_b t)$

ω_s, ω_b が整数比でない場合, 非周期的になる。

複素二重フーリエ級数展開により解析

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開

$$\begin{aligned} G(\omega_s t, \omega_b t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{mn} e^{j[m\omega_b t + n\omega_s t]} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{mn} e^{j[mx + ny]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\omega_s t, \omega_b t) e^{-j(mx + ny)} dx dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-j(mx + ny)} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \omega_b t, y = \omega_s t & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ & & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m=0$ に対して

$$\begin{aligned} K_{0n} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-j(0x+ny)} dx dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-jny} dx dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} [x]_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-jny} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} [\varphi_2 - \varphi_1] e^{-jny} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} (M \sin(y + \gamma) - \beta) + \frac{\pi}{2} (M \sin(y + \gamma) - \alpha) \right] e^{-jny} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left[\pi M \sin(y + \gamma) - \frac{\pi}{2} (\beta + \alpha) \right] e^{-jny} dy \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m=0$ に対して

$$\begin{aligned}
 K_{0n} &= \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sin(y + \gamma) - \frac{\beta + \alpha}{2M} \right] e^{-jny} dy \\
 &= \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{j(y+\gamma)} - e^{-j(y+\gamma)}}{2j} - \frac{\beta + \alpha}{2M} \right] e^{-jny} dy \\
 &= \frac{M}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{j\{(1-n)y + \gamma - \frac{\pi}{2}\}} - e^{-j\{(1+n)y + \gamma + \frac{\pi}{2}\}} - \frac{\beta + \alpha}{M} e^{-jny} \right] dy
 \end{aligned}$$

- $n \neq \pm 1, 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 K_{0n} &= \frac{M}{8\pi} \left[\frac{e^{j\{(1-n)y + \gamma - \frac{\pi}{2}\}}}{j(1-n)} - \frac{e^{-j\{(1+n)y + \gamma + \frac{\pi}{2}\}}}{-j(1+n)} - \frac{\beta + \alpha}{M} \frac{e^{-jny}}{-jn} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{M}{8\pi} \left[\frac{e^{j\{(1-n)2\pi + \gamma - \frac{\pi}{2}\}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{j(1-n)} - \frac{e^{-j\{(1+n)2\pi + \gamma + \frac{\pi}{2}\}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{-j(1+n)} - \frac{\beta + \alpha}{M} \frac{e^{-jn2\pi} - e^0}{-jn} \right] = 0
 \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m=0$ に対して
 - $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} K_{01} &= \frac{M}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{j(\gamma - \frac{\pi}{2})} - e^{-j\{2y + \gamma + \frac{\pi}{2}\}} - \frac{\beta + \alpha}{M} e^{-jy} \right] dy \\ &= \frac{M}{8\pi} \left[ye^{j(\gamma - \frac{\pi}{2})} - \frac{e^{-j\{2y + \gamma + \frac{\pi}{2}\}}}{-2j} - \frac{\beta + \alpha}{M} \frac{e^{-jy}}{-j} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{M}{8\pi} \left[(2\pi - 0)e^{j(\gamma - \frac{\pi}{2})} - \frac{e^{-j\{4\pi + \gamma + \frac{\pi}{2}\}} - e^{-j(\gamma + \frac{\pi}{2})}}{-2j} - \frac{\beta + \alpha}{M} \frac{e^{-j2\pi} - e^0}{-j} \right] \\ &= \frac{M}{8\pi} 2\pi e^{j(\gamma - \frac{\pi}{2})} = \frac{M}{4} (-j) e^{j\gamma} = -j \frac{M}{4} e^{j\gamma} \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m=0$ に対して
 - $n=-1$ のとき

$$\begin{aligned} K_{0-1} &= \frac{M}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{j\{2y+\gamma-\frac{\pi}{2}\}} - e^{-j(\gamma+\frac{\pi}{2})} - \frac{\beta+\alpha}{M} e^{jy} \right] dy \\ &= \frac{M}{8\pi} \left[\frac{e^{j\{2y+\gamma-\frac{\pi}{2}\}}}{2j} - ye^{-j(\gamma+\frac{\pi}{2})} - \frac{\beta+\alpha}{M} \frac{e^{jy}}{j} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{M}{8\pi} \left[\frac{e^{j\{4\pi+\gamma-\frac{\pi}{2}\}} - e^{j(\gamma-\frac{\pi}{2})}}{2j} - (2\pi - 0)e^{-j(\gamma+\frac{\pi}{2})} - \frac{\beta+\alpha}{M} \frac{e^{j2\pi} - e^0}{j} \right] \\ &= \frac{M}{8\pi} (-2\pi) e^{-j(\gamma+\frac{\pi}{2})} = -\frac{M}{4} (-j) e^{-j\gamma} = j \frac{M}{4} e^{-j\gamma} \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m=0$ に対して
 - $n=0$ のとき

$$\begin{aligned} K_{00} &= \frac{M}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{j\{y+\gamma-\frac{\pi}{2}\}} - e^{-j\{y+\gamma+\frac{\pi}{2}\}} - \frac{\beta+\alpha}{M} e^{-j0} \right] dy \\ &= \frac{M}{8\pi} \left[\frac{e^{j\{y+\gamma-\frac{\pi}{2}\}}}{j} - \frac{e^{-j\{y+\gamma+\frac{\pi}{2}\}}}{-j} - \frac{\beta+\alpha}{M} y \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{M}{8\pi} \left[\frac{e^{j\{2\pi+\gamma-\frac{\pi}{2}\}} - e^{j\{+\gamma-\frac{\pi}{2}\}}}{j} - \frac{e^{-j\{2\pi+\gamma+\frac{\pi}{2}\}} - e^{-j\{\frac{\pi}{2}+\gamma\}}}{-j} - \frac{\beta+\alpha}{M} (2\pi - 0) \right] \\ &= \frac{M}{8\pi} \left(-\frac{\beta+\alpha}{M} \right) 2\pi = -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{\pi} \delta - 1 - \frac{2}{\pi} \delta - 1 \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-j(mx+ny)}}{-jm} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy \\ &= \frac{j}{4\pi^2 m} \int_0^{2\pi} e^{-jny} \left[e^{-jmx} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy \\ &= \frac{j}{4\pi^2 m} \int_0^{2\pi} e^{-jny} \left[e^{-jm\frac{\pi}{2}(M \sin\langle y+\gamma \rangle - \beta)} - e^{jm\frac{\pi}{2}(M \sin\langle y+\gamma \rangle - \alpha)} \right] dy \\ &= \frac{j}{4\pi^2 m} \int_0^{2\pi} e^{-jny} \left[e^{-j(Z \sin\langle y+\gamma \rangle - \frac{Z}{M}\beta)} - e^{j(Z \sin\langle y+\gamma \rangle - \frac{Z}{M}\alpha)} \right] dy \quad Z = mM \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成

- 複素二重フーリエ級数展開

- $m \neq 0$ に対して

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

$$e^{jZ \sin \theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(Z) e^{jk\theta} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \frac{j}{4\pi^2 m} \int_0^{2\pi} e^{-jny} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(Z) e^{-jk(y+\gamma)} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(Z) e^{jk(y+\gamma)} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\ &= \frac{j}{4\pi^2 m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(Z) \int_0^{2\pi} e^{-jny} \left[e^{-jk(y+\gamma)} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{jk(y+\gamma)} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\ &= \frac{j}{4\pi^2 m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(Z) \int_0^{2\pi} \left[e^{-j\langle(k+n)y+k\gamma\rangle} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{j\langle(k-n)y+k\gamma\rangle} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \end{aligned}$$

$$\text{ただし } Z = mM \frac{\pi}{2}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m \neq 0$ に対して Σ を分解して計算
 - $k \neq \pm n$ のとき

$$\begin{aligned}
 K_{mn}(k) &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_k(Z) \int_0^{2\pi} \left[e^{-j\langle (k+n)y+k\gamma \rangle} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{j\langle (k-n)y+k\gamma \rangle} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_k(Z) \left[\frac{e^{-j\langle (k+n)y+k\gamma \rangle}}{-j(k+n)} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - \frac{e^{j\langle (k-n)y+k\gamma \rangle}}{j(k+n)} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_k(Z) \left[\frac{e^{-j\langle (k+n)2\pi+k\gamma \rangle} - e^{-j\langle (k+n)0+k\gamma \rangle}}{-j(k+n)} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - \frac{e^{j\langle (k-n)2\pi+k\gamma \rangle} - e^{j\langle (k-n)0+k\gamma \rangle}}{j(k+n)} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m \neq 0$ に対して Σ を分解して計算

$$\begin{aligned}
 K_{mn}(k) &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_n(Z) \int_0^{2\pi} \left[e^{-j\langle(n+n)y+n\gamma\rangle} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{j\langle(n-n)y+n\gamma\rangle} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_n(Z) \int_0^{2\pi} \left[e^{-j(2ny+n\gamma)} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{j(0y+n\gamma)} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_n(Z) \left[\frac{e^{-j(2ny+n\gamma)}}{-j2n} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - ye^{jn\gamma} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_n(Z) \left[\frac{e^{-j(2n2\pi+n\gamma)} - e^{-j(2n0+n\gamma)}}{-j2n} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - (2\pi - 0)e^{jn\gamma} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] \\
 &= \frac{-j}{2\pi m} J_n(Z) e^{jn\gamma} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} = \frac{-j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j(-\frac{Z}{M}\alpha + n\gamma)}
 \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成

- 複素二重フーリエ級数展開

- $m \neq 0$ に対して Σ を分解して計算 $J_{-n}(Z) = (-1)^n J_n(Z)$

$$\begin{aligned}
 K_{mn}(k) &= \frac{j}{4\pi^2 m} J_{-n}(Z) \int_0^{2\pi} \left[e^{-j\langle(-n+n)y-n\gamma\rangle} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{j\langle(-n-n)y-n\gamma\rangle} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} (-1)^n J_n(Z) \int_0^{2\pi} \left[e^{-j\langle 0y-n\gamma\rangle} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - e^{-j\langle 2ny-n\gamma\rangle} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] dy \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} (-1)^n J_n(Z) \left[ye^{jn\gamma} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - \frac{e^{-j(2ny-n\gamma)}}{-j2n} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{j}{4\pi^2 m} (-1)^n J_n(Z) \left[(2\pi - 0)e^{jn\gamma} e^{j\frac{Z}{M}\beta} - \frac{e^{-j(2n2\pi-n\gamma)} - e^{-j(2n0-n\gamma)}}{-j2n} e^{-j\frac{Z}{M}\alpha} \right] \\
 &= \frac{j}{2\pi m} (-1)^n J_n(Z) e^{jn\gamma} e^{j\frac{Z}{M}\beta} = \frac{j}{2\pi m} (-1)^n J_n(Z) e^{j(\frac{Z}{M}\beta + n\gamma)}
 \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m \neq 0$ に対して

- $k \neq \pm n, k=n, k=-n$ の結果から

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \frac{-j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j(-\frac{Z}{M}\alpha + n\gamma)} + \frac{j}{2\pi m} (-1)^n J_n(Z) e^{j(\frac{Z}{M}\beta + n\gamma)} \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) \left[-e^{j(-\frac{Z}{M}\alpha + n\gamma)} + (-1)^n e^{j(\frac{Z}{M}\beta + n\gamma)} \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) e^{jn\gamma} \left[-e^{-j\frac{Z}{M}(\frac{2}{\pi}\delta - 1)} + (-1)^n e^{j\frac{Z}{M}(-\frac{2}{\pi}\delta - 1)} \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j(-\frac{Z}{M}\frac{2}{\pi}\delta + n\gamma)} \left[-e^{j\frac{Z}{M}} + (-1)^n e^{-j\frac{Z}{M}} \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j(-\frac{Z}{M}\frac{2}{\pi}\delta + n\gamma)} \left[-e^{jm\frac{\pi}{2}} + (-1)^n e^{-jm\frac{\pi}{2}} \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素二重フーリエ級数展開
 - $m \neq 0$ に対して
 - $k \neq \pm n, k = n, k = -n$ の結果から

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j\left(-\frac{1}{M}mM\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}\delta+n\gamma\right)} \left[-j^m + (-1)^n (-j)^m \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-j^m + (-1)^n (-1)^m j^m \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n(Z) e^{j(-m\delta+n\gamma)} j^m \left[-1 + (-1)^{n+m} \right] \\ &= \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_n\left(Mm\frac{\pi}{2}\right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
- 複素二重フーリエ級数展開

- まとめ

- $m=0$

- $n \neq \pm 1, 0 \quad K_{0n} = 0$

$$K_{01} = -j \frac{M}{4} e^{j\gamma}$$

$$K_{0-1} = j \frac{M}{4} e^{-j\gamma}$$

$$K_{00} = \frac{1}{2}$$

- $m \neq 0$

$$K_{mn} = \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right]$$

- 複素フーリエ係数のままでは分りづらいので実フーリエ係数に変換する

PWMによる出力制御

- 実フーリエ級数と複素フーリエ級数の関係
 - 実フーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$$

- オイラーの公式
$$\begin{cases} \cos kx = \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2} \\ \sin kx = \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} + b_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnx} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jnx} \right\} \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 実フーリエ級数と複素フーリエ級数の関係

- 実フーリエ級数展開

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \\ c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2} \end{cases} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n e^{jnx} + c_n^* e^{-jnx} \right\}$$
$$\begin{cases} n > 0 & c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \\ n = 0 & c_0 = \frac{a_0}{2} \\ n < 0 & c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_n^* \end{cases}$$

- 複素フーリエ級数展開 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換
 - 複素表示

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{mn} e^{j(mx+ny)} \\ &= K_{00} + K_{10} e^{jx} + K_{01} e^{jy} + K_{-10} e^{-jx} + K_{0-1} e^{-jy} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_{mn} e^{j(mx+ny)} + K_{-mn} e^{j(-mx+ny)} \right. \\ &\quad \left. + K_{m-n} e^{j(mx-ny)} + K_{-m-n} e^{j(-mx-ny)} \right] \end{aligned}$$

- 実表示

$$\begin{aligned} G(x, y) &= a_{00} + a_{10} \cos x + b_{10} \sin x + a_{01} \cos y + b_{01} \sin y \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{mn} \cos(mx+ny) + b_{mn} \sin(mx+ny) \right. \\ &\quad \left. + a_{m-n} \cos(mx-ny) + b_{m-n} \sin(mx-ny) \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned} G(x, y) &= K_{00} + K_{10}(\cos x + j \sin x) + K_{01}(\cos y + j \sin y) \\ &\quad + K_{-10}(\cos x - j \sin x) + K_{0-1}(\cos y - j \sin y) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} &K_{mn} \{ \cos(mx + ny) + j \sin(mx + ny) \} \\ &+ K_{-mn} \{ \cos(-mx + ny) + j \sin(-mx + ny) \} \\ &+ K_{m-n} \{ \cos(mx - ny) + j \sin(mx - ny) \} + \\ &K_{-m-n} \{ \cos(-mx - ny) - j \sin(mx + ny) \} \end{aligned} \right] \\ &= K_{00} + (K_{10} + K_{-10})\cos x + j(K_{10} - K_{-10})\sin x \\ &\quad + (K_{01} + K_{0-1})\cos y + j(K_{01} - K_{0-1})\sin y \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} &\{K_{mn} + K_{-m-n}\}\cos(mx + ny) + j\{K_{mn} - K_{-m-n}\}\sin(mx + ny) \\ &+ \{K_{-mn} + K_{m-n}\}\cos(mx - ny) + j\{-K_{-mn} + K_{m-n}\}\sin(mx - ny) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{00} = K_{00} \\ a_{01} = K_{01} + K_{0-1} \\ b_{01} = j(K_{01} - K_{0-1}) \\ a_{mn} = K_{mn} + K_{-m-n} \\ b_{mn} = j\{K_{mn} - K_{-m-n}\} \\ a_{m-n} = K_{-mn} + K_{m-n} \\ b_{m-n} = j\{-K_{-mn} + K_{m-n}\} \end{array} \right. \xrightarrow{\quad} \left\{ \begin{array}{l} a_{00} = \frac{1}{2} \\ a_{01} = -j \frac{M}{4} e^{j\gamma} + j \frac{M}{4} e^{-j\gamma} = j \frac{M}{4} (-e^{j\gamma} + e^{-j\gamma}) \\ \quad = j \frac{M}{4} (-\cos \gamma - j \sin \gamma + \cos \gamma - j \sin \gamma) \\ \quad = \frac{M}{2} \sin \gamma \\ b_{01} = j(-j \frac{M}{4} e^{j\gamma} - j \frac{M}{4} e^{-j\gamma}) = \frac{M}{4} e^{j\gamma} + \frac{M}{4} e^{-j\gamma} \\ \quad = \frac{M}{4} (\cos \gamma + j \sin \gamma + \cos \gamma - j \sin \gamma) \\ \quad = \frac{M}{2} \cos \gamma \end{array} \right.$$

※信号波の次数nの周波数は搬送波の次数mに比べて小さいのでm-n>0が支配的

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$K_{mn} = \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right]$$

$$J_\nu \left(e^{jm\pi} Z \right) = e^{j\nu m\pi} J_\nu(Z) \quad \text{より}$$

$$e^{jm\pi} = -1 \quad m=1 \quad \text{に対して}$$

$$J_{-n}(-Z) = (-1)^n J_n(-Z) = (-1)^n (-1)^n J_n(Z) = J_n(Z)$$

$$K_{-m-n} = \frac{j^{-m+1}}{2\pi(-m)} J_{-n} \left(-Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{-n-m} \right]$$

$$= -\frac{j^{-m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right]$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned}a_{mn} &= K_{mn} + K_{-m-n} \\&= \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \\&\quad - \frac{j^{-m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \\&= \frac{j}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \left[j^m e^{j(-m\delta+n\gamma)} - j^{-m} e^{j(m\delta-n\gamma)} \right] \\&= \frac{j}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \left[e^{j(-m\delta+n\gamma+m\frac{\pi}{2})} - e^{j(m\delta-n\gamma-m\frac{\pi}{2})} \right]\end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{j}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \begin{bmatrix} \cos \left(-m\delta + n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \\ + j \sin \left(-m\delta + n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \\ - \cos \left(m\delta - n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right) \\ - j \sin \left(m\delta - n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] 2j \sin \left(-m\delta + n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \sin \left(-m\delta + n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned} b_{mn} &= j \{ K_{mn} - K_{-m-n} \} \\ &= \frac{j^{m+2}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \\ &\quad + \frac{j^{-m+2}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \\ &= \frac{j^2}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \left[j^m e^{j(-m\delta+n\gamma)} + j^{-m} e^{j(m\delta-n\gamma)} \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \left[e^{j(-m\delta+n\gamma+m\frac{\pi}{2})} + e^{j(m\delta-n\gamma-m\frac{\pi}{2})} \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned} b_{mn} &= \frac{-1}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \begin{bmatrix} \cos(-m\delta + n\gamma + m\frac{\pi}{2}) \\ + j \sin(-m\delta + n\gamma + m\frac{\pi}{2}) \\ + \cos(m\delta - n\gamma - m\frac{\pi}{2}) \\ + j \sin(m\delta - n\gamma - m\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] 2 \cos(-m\delta + n\gamma + m\frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] \cos(-m\delta + n\gamma + m\frac{\pi}{2}) \\ ja_{mn} + b_{mn} &= -\frac{1}{\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] e^{j(-m\delta + n\gamma + m\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$K_{mn} = \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right]$$

$$J_\nu \left(e^{jm\pi} Z \right) = e^{j\nu m\pi} J_\nu(Z) \quad \text{より} \quad J_{-n}(Z) = (-1)^n J_n(Z)$$

$$e^{jm\pi} = -1 \quad m = 1 \quad \text{に対して}$$

$$J_{-n}(-Z) = (-1)^n J_n(-Z) = (-1)^n (-1)^n J_n(Z) = J_n(Z)$$

$$K_{m-n} = \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_{-n} \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m-n} \right]$$

$$= \frac{j^{m+1}}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m-n} \right]$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$K_{mn} = \frac{j^{m+1}}{2\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m+n} \right]$$

$$J_\nu \left(e^{jm\pi} Z \right) = e^{j\nu m\pi} J_\nu(Z) \quad \text{より}$$

$$e^{jm\pi} = -1 \quad m=1 \quad \text{に対して}$$

$$J_n(-Z) = (-1)^n J_n(Z)$$

$$\begin{aligned} K_{-mn} &= \frac{j^{-m+1}}{2\pi(-m)} J_n \left(-Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \\ &= \frac{-j^{-m+1}}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned}a_{m-n} &= K_{-mn} + K_{m-n} \\&= \frac{-j^{-m+1}}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \\&\quad + \frac{j^{m+1}}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m-n} \right] \\&= \frac{j^1}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \left[-j^{-m} e^{j(m\delta+n\gamma)} + j^m e^{j(-m\delta-n\gamma)} \right] \\&= \frac{j^1}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \left[-e^{j(m\delta+n\gamma-m\frac{\pi}{2})} + e^{j(-m\delta-n\gamma+m\frac{\pi}{2})} \right]\end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned} a_{m-n} &= \frac{j}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \begin{bmatrix} -\cos \left(m\delta + n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right) \\ -j \sin \left(m\delta + n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right) \\ + \cos \left(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \\ + j \sin \left(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{j}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] 2j \sin \left(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \sin \left(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$\begin{aligned} b_{m-n} &= j \{ -K_{-mn} + K_{m-n} \} \\ &= \frac{j^{-m+2}}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(m\delta+n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \\ &\quad + \frac{j^{m+2}}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) e^{j(-m\delta-n\gamma)} \left[-1 + (-1)^{m-n} \right] \\ &= \frac{j^2}{2\pi m} (-1)^n J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \left[j^{-m} e^{j(m\delta+n\gamma)} + j^m e^{j(-m\delta-n\gamma)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \left[e^{j(m\delta+n\gamma-m\frac{\pi}{2})} + e^{j(-m\delta-n\gamma+m\frac{\pi}{2})} \right] \end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三角波比較によるPWMパルスの生成
 - 複素フーリエ係数→実フーリエ係数変換

$$b_{m-n} = \frac{1}{2\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \begin{bmatrix} \cos \left(m\delta + n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right) \\ + j \sin \left(m\delta + n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right) \\ + \cos \left(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \\ + j \sin \left(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] 2 \cos \left(m\delta + n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] \cos \left(m\delta + n\gamma - m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$ja_{m-n} + b_{m-n} = \frac{1}{\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] e^{j(-m\delta - n\gamma + m \frac{\pi}{2})}$$

PWMによる出力制御

- 三相インバータの3パルス非同期PWM
 - 多重フーリエ級数展開
 - AB相間
 - A相 $\gamma=0$, B相 $\gamma=-2/3\pi$
 - 高調波

$$\begin{aligned}ja_{ABmn} + b_{ABmn} &= ja_{Amn} + b_{Amn} - ja_{Bmn} - b_{Bmn} \\&= -\frac{1}{\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] e^{j(-m\delta + n0 + m\frac{\pi}{2})} \\&\quad + \frac{1}{\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] e^{j(-m\delta - n\frac{2}{3}\pi + m\frac{\pi}{2})} \\&= \frac{1}{\pi m} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{m+n} \right] e^{j(-m\delta + m\frac{\pi}{2})} \left(-1 + e^{-jn\frac{2}{3}\pi} \right)\end{aligned}$$

PWMによる出力制御

- 三相インバータの3パルス非同期PWM
 - 多重フーリエ級数展開
 - AB相间
 - A相 $\gamma=0$, B相 $\gamma=-2/3\pi$
 - 高調波

$$\begin{aligned} ja_{ABm-n} + b_{ABm-n} &= ja_{Am-n} + b_{Am-n} - ja_{Bm-n} - b_{Bm-n} \\ &= \frac{1}{\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] e^{j(-m\delta - 0\gamma + m\frac{\pi}{2})} \\ &\quad - \frac{1}{\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] e^{j(-m + n\frac{2}{3}\pi + m\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{1}{\pi m} (-1)^{n+1} J_n \left(Mm \frac{\pi}{2} \right) \left[-1 + (-1)^{-m+n} \right] e^{j(-m\delta + m\frac{\pi}{2})} \left(1 - e^{jn\frac{2}{3}\pi} \right) \end{aligned}$$