回路とシステム
第一回　回路方程式
節点方程式と閉路方程式

舟木　剛

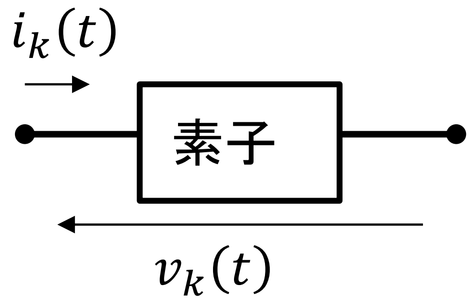
2025年10月6日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

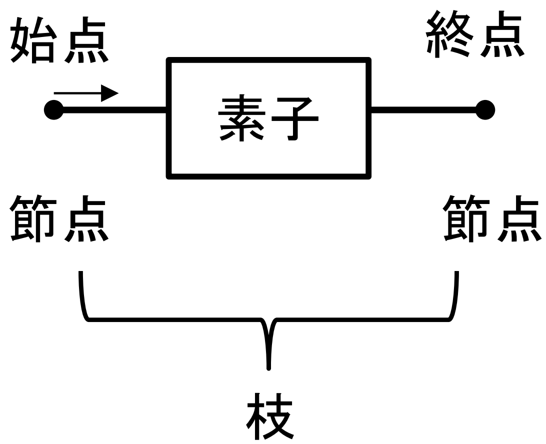
回路方程式

- 回路方程式とは
  - 回路を構成する素子の電気的特性と素子の接続関係を表した式
    - m個の素子で構成された回路
      - $2m$個の状態変数
        - 電圧$v_k(t)$ $(k = 1,2,\cdots,m)$
        - 電流$i_k(t)$ $(k = 1,2,\cdots,m)$
      - 直流･交流回路
        - vとiの関係は代数方程式
      - 過渡回路
        - L,C:vとiの関係は微分方程式
        - 抵抗:vとiの関係は代数方程式



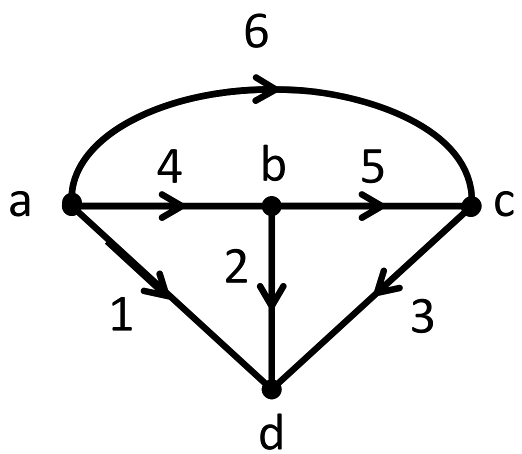
回路方程式

- 回路における素子の接続構造の表現
  - 節点:回路素子の接続点
    - 始点:素子に入る, 終点:素子から出る
  - 枝:回路素子等の節点間をつなぐもの
  - 閉路:枝をつないで電流が流れる経路がある状態
    - 閉路が形成されないと回路として機能しない
- KCL(キルヒホッフの電流則)
  - 節点に流れ込む電流の和は0
- KVL(キルヒホッフの電圧則)
  - 閉路に沿った電圧の和は0



回路方程式

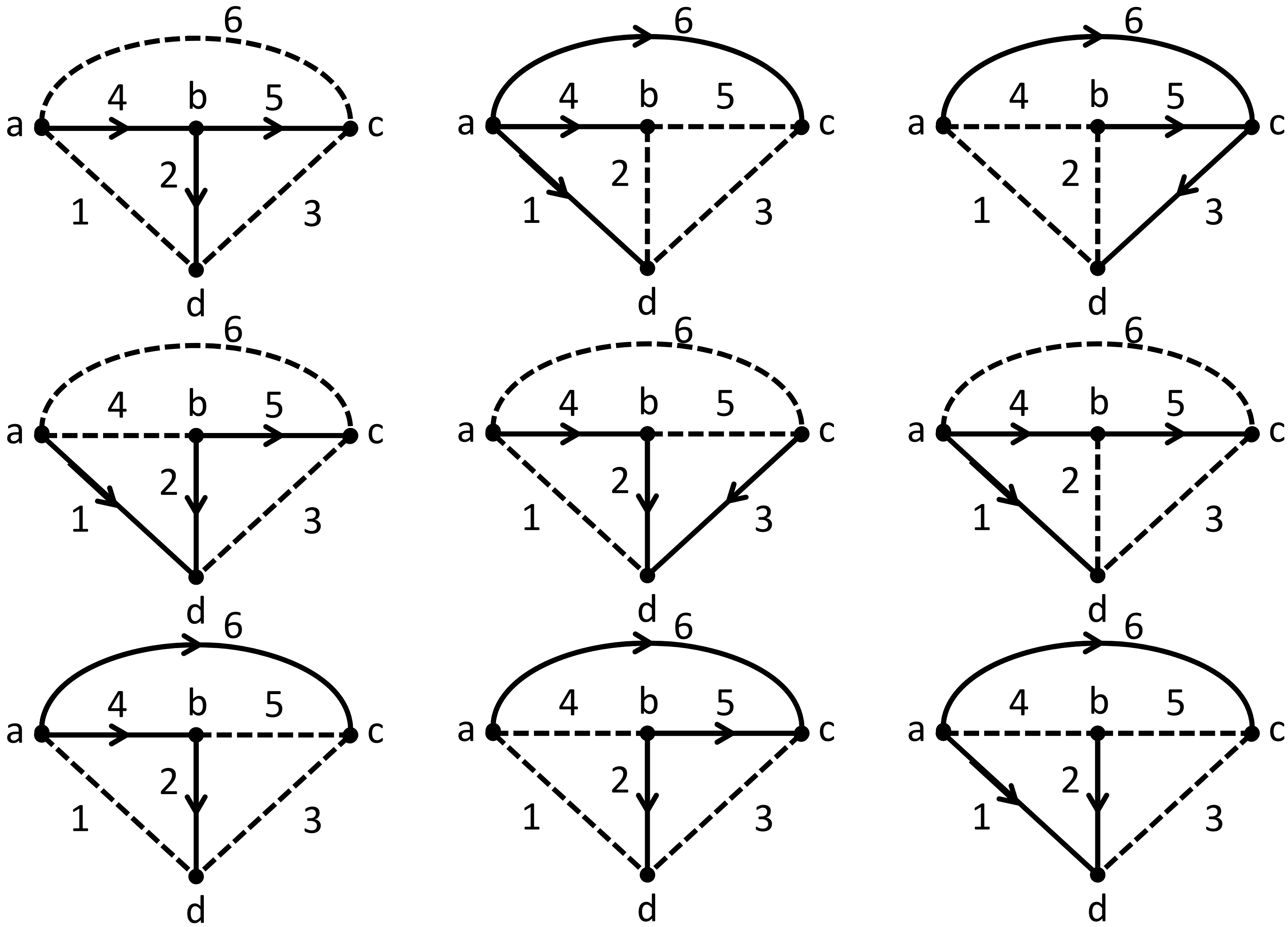
- 木:閉路を形成しない最大の枝の集合
  - 全ての節点を含む
  - 組み合わせは複数ある
- 補木:木に含まれない枝の集合
  - 木に補木を付加すると閉路が形成される



回路の接続状態を
節点と枝で表した有向グラフの図
4節点5枝

回路方程式

- 木の例



回路方程式

- m個の二端子素子でn個の節点をもつ回路
  - 素子の特性方程式:m個
  - KCL方程式: $n-1$個
  - KVL方程式: $m-n+1$個

←iとvの関係

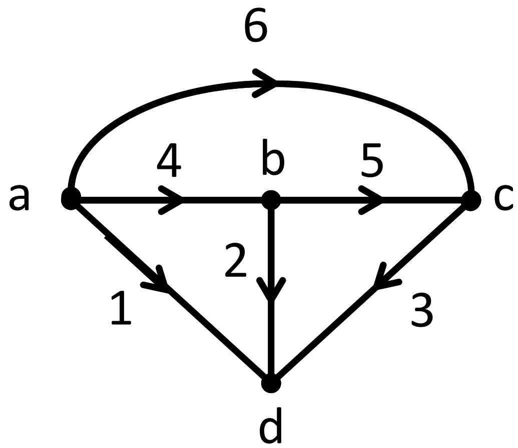
$2m$個

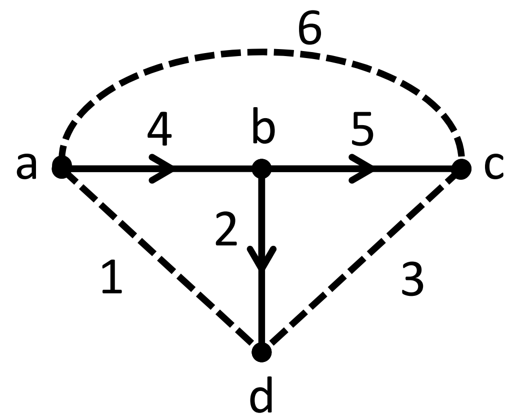
←補木の数

- 節点変換:回路方程式を節点方程式にまとめる
  - $n-1$個の節点電位
- 閉路変換:回路方程式を閉路方程式にまとめる
  - $m-n+1$個の閉路電流

回路方程式

- KCL(n-1=4-1=3)
  - $a: i_1 + i_4 + i_6 = 0$
  - $b: i_2 - i_4 + i_5 = 0$
  - $c: i_3 - i_5 - i_6 = 0$
  - $d: -i_1 - i_2 - i_3 = 0$
  - 一つ冗長
- KVL(m-n+1=6-4+1=3)
  - $1: v_1 - v_2 - v_4 = 0$
  - $3: v_3 - v_2 + v_5 = 0$
  - $6: v_6 - v_5 - v_4 = 0$





節点方程式

- n個の節点からなる回路
  - $n-1$個の節点電位を未知変数とする$n-1$個の連立方程式
  - 回路を構成するn個の節点の中から，基準節点0を決める
    - 基準節点は実回路におけるグラウンドに相当
    - $u_p(t)$:節点$p(p=1,2,\cdots,n-1)$の時刻tにおける，基準節点0に対する電位
    - $v_k(t)$:枝kの素子電圧
      - 枝$k=(p,q)$
        - p:始点，q:終点
      - $v_k(t)=u_p(t)-u_q(t)$

接続行列

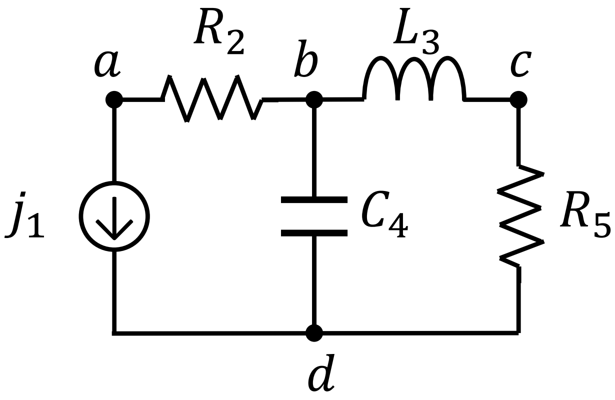
- 接続行列
  - 節点と枝からなる回路を表す
  - 節点数n，枝数mの回路の有向グラフ
    - グラフ:節点と枝により構成される
    - 有向グラフ:節点と向きを持つ枝により構成されたグラフ
      - 電圧の極性，電流の向き
  - a_{ij}を成分とする$n \times m$行列A
    - $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点}i\text{から枝}j\text{に出る} \\ -1 & \text{節点}i\text{に枝}j\text{から入る} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$
  - 既約接続行列:基準節点に関する行を削除した$(n-1) \times m$ 行列$\boldsymbol{A}_r$

節点変換

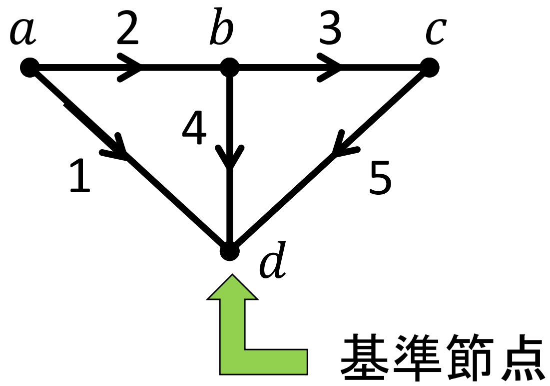
- 節点電位ベクトル$\boldsymbol{u}(t)$から素子電圧ベクトル$\boldsymbol{v}(t)$への変数変換
  - 素子電圧ベクトル:$\boldsymbol{v}(t) = [v_1(t) \quad v_2(t) \quad \cdots \quad v_m(t)]^T$
    - $v_k(t)(k = 1,2,\cdots,m)$:二端子素子電圧
  - 節点電位ベクトル:$\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_{n-1}(t)]^T$
    - $u_p(t)(p = 1,2,\cdots,n-1)$:節点電位
  - $\boldsymbol{A}_r$:節点pがp行，素子kがk列に対応する既約接続行列
    - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{A}_r{}^T\boldsymbol{u}(t)$
      - m個の素子電圧が$n-1$個の節点電位で表される

節点変換の例

回路図



グラフ



既約接続行列

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \boldsymbol{A}_r = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & 1 & \\ & & -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

節点変換

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & 1 & \\ & & -1 & & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_a - u_b \\ u_b - u_c \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

電圧制御形素子の特性方程式

- 素子電流$i(t)$が素子電圧$v(t)$の関数で表される
  - 抵抗:$i(t) = Gv(t)$
  - コンデンサ:$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) = C\Delta v(t)$
    - Δ:微分記号
  - インダクタ:$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0) = \frac{1}{L}\Gamma v(t) + i(t_0)$
    - Γ:積分記号, t_0:時刻初期値
  - 電流源:$i(t) = 0v(t) + j(t) = j(t)$
    - 電流源は係数が0の電圧制御型素子と見なす

節点方程式の導出

- KCL方程式:$\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{i}(t) = 0$
- 節点変換式:$\boldsymbol{v}(t) = {\boldsymbol{A}_r}^T\boldsymbol{u}(t)$
- 特性方程式:$\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{j}(t)$
  - $\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{j}(t) = \boldsymbol{\Psi}{\boldsymbol{A}_r}^T\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{j}(t)$
- 節点方程式の導出:
  - $\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{A}_r\left(\boldsymbol{\Psi}{\boldsymbol{A}_r}^T\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{j}(t)\right) = 0$
  - $\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{\Psi}{\boldsymbol{A}_r}^T\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{j}(t) = 0$
    - $n-1$個の節点電位を未知数とする連立方程式
    - KCLになっている

節点方程式のまとめ

- 素子数m個，節点数n個の回路
  - $\boldsymbol{v}(t)$:素子電圧ベクトル，$\boldsymbol{i}(t)$:素子電流ベクトル
- 節点方程式
  - $\boldsymbol{A}_r \boldsymbol{\Psi} {\boldsymbol{A}_r}^T \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{j}(t) = 0$
    - KCL方程式$n-1$個より導出
    - $\boldsymbol{u}(t)$:節点電位ベクトル，$\boldsymbol{j}(t)$:電流源ベクトル
    - $\boldsymbol{\Psi}$:電圧制御型の特性行列(対角行列)
    - $\boldsymbol{A}_r$:既約接続行列

閉路変換

- n個の節点，m個の枝に対する木T，補木T'を考える
  - 補木T'による基本閉路$m-n+1$個
  - 基準節点0に対する既約接続行列$\boldsymbol{A_r}$
    - $\boldsymbol{A_r} = [\boldsymbol{A_c}|\boldsymbol{A_t}]$
      - $\boldsymbol{A_c}$:補木T'，$\boldsymbol{A_t}$:木Tに対応する$\boldsymbol{A_r}$の部分行列
  - 基本閉路行列$\boldsymbol{B_f}$
    - $\boldsymbol{B_f} = [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B_t}]$
      - 列を$\boldsymbol{A_r}$にそろえる。
        - $\boldsymbol{I}$:補木T'，$\boldsymbol{B_t}$:木Tに対応する$\boldsymbol{B_f}$の部分行列

閉路変換

- 補木T'の枝k
  - 素子電流i_k
  - 枝kできまる基本閉路L_k
  - 素子電流i_kは基本閉路L_kの閉路電流となる
  - $\boldsymbol{A}_r$の列に対応した枝電流$\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{T}} = [\boldsymbol{i}_c \boldsymbol{i}_t]^{\boldsymbol{T}}$
- $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ {\boldsymbol{B}_t}^T \boldsymbol{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ {\boldsymbol{B}_t}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{i}_c = [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}_t]^T \boldsymbol{i}_c = {\boldsymbol{B}_f}^T \boldsymbol{i}_c$
  - 補木T'の$m - n + 1$個の基本閉路電流が求まれば，回路中のm個の素子電流が全て閉路変換により求まる

閉路変換

- 接続行列$\boldsymbol{A}$，閉路行列$\boldsymbol{B}$の列の順序の対応 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = 0$
  - $\boldsymbol{A}$のp行　$\boldsymbol{a}_p = [a_{p1} \quad a_{p2} \quad \cdots \quad a_{pn}]$
  - $\boldsymbol{B}^T$の$\boldsymbol{r}$列=$\boldsymbol{B}$の$\boldsymbol{r}$行　$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{r}} = [b_{r1} \quad b_{r2} \quad \cdots \quad b_{rn}]$
  - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$の$(p,r)$要素　$a_p {b_r}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{rk}$
  - $\boldsymbol{A}$のp行に対応する節点pが，$\boldsymbol{B}$のr行に対応する閉路rにない場合 $b_{rk} = 0$
    - $a_p {b_r}^T = 0$

閉路変換

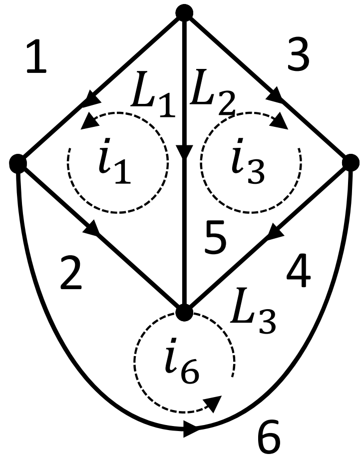
- $\boldsymbol{A}$のp行に対応する節点pが，$\boldsymbol{B}$のr行に対応する閉路rにある場合
  - 節点pに接続され，閉路r上にある枝は2個存在k_1, k_2
    - 枝k_1, k_2が閉路r上で同じ向き
      - $a_{pk_1} = -a_{pk_2}$　　$b_{rk_1} = b_{rk_2}$
    - 枝k_1, k_2が閉路r上で逆向き
      - $a_{pk_1} = a_{pk_2}$　　$b_{rk_1} = -b_{rk_2}$
    - $a_p {b_r}^T = a_{pk_1} b_{rk_1} + a_{pk_2} b_{rk_2} = 0$

閉路変換

- $\boldsymbol{A}_r {\boldsymbol{B}_f}^T = [\boldsymbol{A}_c \boldsymbol{A}_t][\boldsymbol{I} \boldsymbol{B}_t]^T = \boldsymbol{A}_c + \boldsymbol{A}_t {\boldsymbol{B}_t}^T = 0$
  - $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{t}} {\boldsymbol{B}_t}^T = -\boldsymbol{A}_c$ $\qquad {\boldsymbol{B}_t}^T = -{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{t}}}^{-1} \boldsymbol{A}_c$
- 電流ベクトル$\boldsymbol{i}$を$\boldsymbol{A}_r$にそろえる
  - $\boldsymbol{i}^T = [\boldsymbol{i}_c | \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}]^T$
    - $\boldsymbol{i}_c$:補木T'，$\boldsymbol{i}_t$:木Tに対応する$\boldsymbol{i}$の部分ベクトル
- KCL方程式
  - $\boldsymbol{A}_r \boldsymbol{i} = [\boldsymbol{A}_c \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{t}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_c \boldsymbol{i}_c + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}} = 0$
    - $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}} = -{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{t}}}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{A}_c \boldsymbol{i}_c = {\boldsymbol{B}_t}^T \boldsymbol{i}_c$

閉路変換の例

- 木2,4,5
- 補木1,3,6
- 補木1,3,6の枝の素子電流i_1, i_3, i_6
- 補木1,3,6が形成する閉路L_1, L_2, L_3
- 木2,4,5の枝に対応する素子電流i_2, i_4, i_5



- $\boldsymbol{B}_f = [\overset{T'}{\boldsymbol{I}}|\overset{T}{\boldsymbol{B}_t}] = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & -1 \\ & 1 & & & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & 1 & \end{array}\right] \end{array}$

閉路変換の例

- $$\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_6 \\ i_3 + i_6 \\ -i_1 - i_3 \end{bmatrix}$$
$$= \boldsymbol{B}_t{}^T \boldsymbol{i}_c$$
- 木$\boldsymbol{T}$の電流ベクトル$\boldsymbol{i}_t = [i_2 \quad i_4 \quad i_5]^T$
- 補木$\boldsymbol{T}'$の電流ベクトル$\boldsymbol{i}_c = [i_1 \quad i_3 \quad i_6]^T$
- $$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ \boldsymbol{i}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ \boldsymbol{B}_t{}^T \boldsymbol{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{B}_t{}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{i}_c = [\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}_t]^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{i}_c = \boldsymbol{B}_f{}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{i}_c$$

電流制御形素子

- 素子電圧$v(t)$が素子電流$i(t)$の関数で表される
  - 抵抗:$v(t) = Ri(t)$
  - コンデンサ:$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0) = \frac{1}{C}\Gamma i(t) + v(t_0)$
    - Γ:積分記号, t_0:時刻初期値
  - インダクタ:$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\Delta i(t)$
    - Δ:微分記号
  - 電圧源:$v(t) = 0i(t) + e(t) = e(t)$
    - 電圧源は係数が0の電流制御型素子と見なす

閉路方程式の導出

- 補木電流変換:$\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{B}_f{}^T \boldsymbol{i}_c(t)$
- KVL方程式:$\boldsymbol{B}_f \boldsymbol{v}(t) = 0$
- 特性方程式:$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t)$
  - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{B}_f{}^T \boldsymbol{i}_c(t) + \boldsymbol{e}(t)$
- 閉路方程式の導出:
  - $\boldsymbol{B}_f \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{B}_f \left(\boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t) \right) = 0$
  - $\boldsymbol{B}_f \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{B}_f \boldsymbol{e}(t) = 0$
    - $m - n + 1$個の節点電位を未知数とする連立方程式
    - $m - n$個の独立なループに対するKVL方程式

閉路変換まとめ

- 閉路方程式
  - $\boldsymbol{B}_f \boldsymbol{\varXi} \boldsymbol{B}_f{}^T \boldsymbol{i}_c(t) + \boldsymbol{B}_f \boldsymbol{e}(t) = 0$
    - KVL方程式$m - n + 1$個より導出
    - $\boldsymbol{i}_c(t)$:閉路電流ベクトル，$\boldsymbol{e}(t)$:電圧源ベクトル
    - $\boldsymbol{\varXi}$:電流制御型の特性行列(対角行列)
    - $\boldsymbol{B}_f$:基本閉路行列
  - $\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{B}_f{}^T \boldsymbol{i}_c(t)$
  - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\varXi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t)$