回路とシステム
第二回
ラプラス変換による回路解析

舟木　剛

2025年10月20日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

回路方程式

- 節点:回路素子の接続点
  - 始点:素子に入る，終点:素子から出る
- 枝:回路素子等の節点間をつなぐもの
- 閉路:枝をつないで電流が流れる経路がある状態
  - 閉路が形成されないと回路として機能しない
- 木:閉路を形成しない最大の枝の集合
  - 全ての節点を含む
  - 組み合わせは複数ある
- 補木:木に含まれない枝の集合
  - 木に補木を付加すると閉路が形成される

節点変換まとめ

- 素子数m個，節点数n個の回路
  - $\boldsymbol{v}(t)$:素子電圧ベクトル，$\boldsymbol{i}(t)$:素子電流ベクトル
- 節点方程式
  - $\boldsymbol{A}_r \boldsymbol{\Psi} {\boldsymbol{A}_r}^T \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{j}(t) = 0$
    - KCL方程式$n-1$個より導出
    - $\boldsymbol{u}(t)$:節点電位ベクトル，$\boldsymbol{j}(t)$:電流源ベクトル
    - $\boldsymbol{\Psi}$:電圧制御型の特性行列(対角行列)
    - $\boldsymbol{A}_r$:既約接続行列←基準節点
  - $\boldsymbol{v}(t) = {\boldsymbol{A}_r}^T \boldsymbol{u}(t)$
  - $\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{j}(t)$

閉路変換まとめ

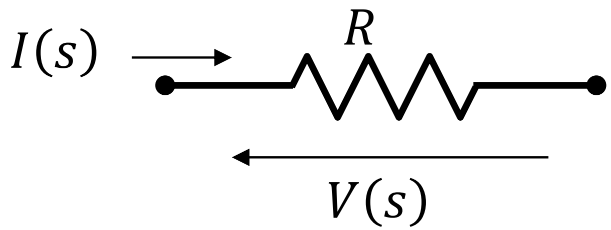
- 閉路方程式
  - $\boldsymbol{B}_f \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{B}_f{}^T \boldsymbol{i}_c(t) + \boldsymbol{B}_f \boldsymbol{e}(t) = 0$
    - KVL方程式$m - n + 1$個より導出
    - $\boldsymbol{i}_c(t)$:閉路電流ベクトル，$\boldsymbol{e}(t)$:電圧源ベクトル
    - $\boldsymbol{\Xi}$:電流制御型の特性行列(対角行列)
    - $\boldsymbol{B}_f$:基本閉路行列
  - $\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{B}_f{}^T \boldsymbol{i}_c(t)$
  - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t)$

ラプラス変換による回路解析

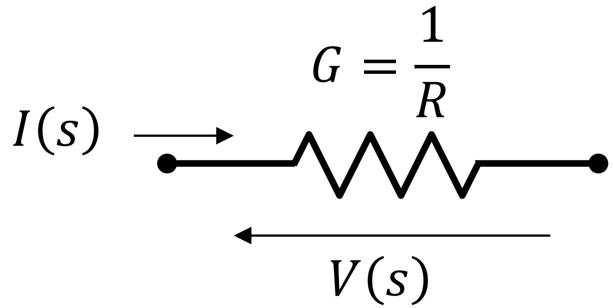
- 回路の過渡応答　→　微分方程式
- 線形時不変回路　→　ラプラス変換による常微分方程式の求解が可能
- ラプラス変換　時間領域→複素領域
  - $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
    - $\mathcal{L}[i_k(t)] = I_k(s), \mathcal{L}[v_k(t)] = V_k(s)$
- 逆変換
  - $f(t) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-ip}^{c+ip} F(s)e^{st}ds$

ラプラス変換による回路解析

- 抵抗
  - インピーダンス表現
    - $v(t) = Ri(t) \ \rightarrow \ V(s) = RI(s)$



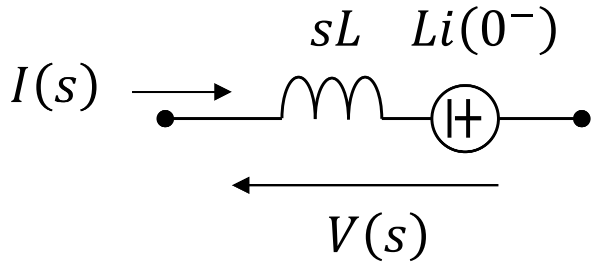
  - アドミタンス表現
    - $i(t) = Gv(t) \ \rightarrow \ I(s) = GV(s)$



ラプラス変換による回路解析

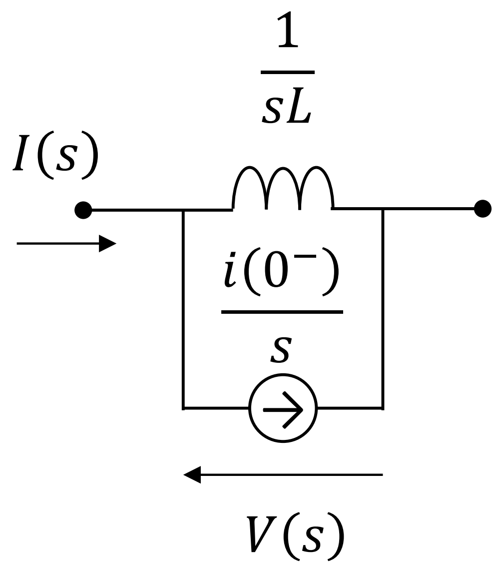
- インダクタ
  - $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$
    - インピーダンス表現

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$



    - アドミタンス表現

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



第一種初期条件:$t = 0^-$
第二種初期条件:$t = 0^+$

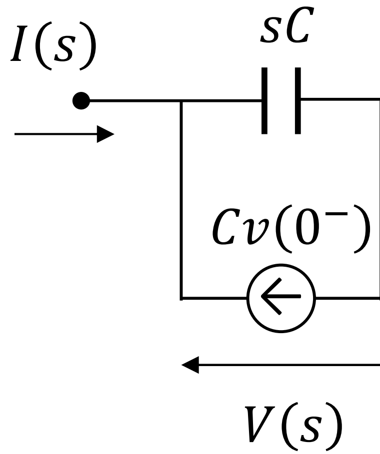
ラプラス変換による回路解析

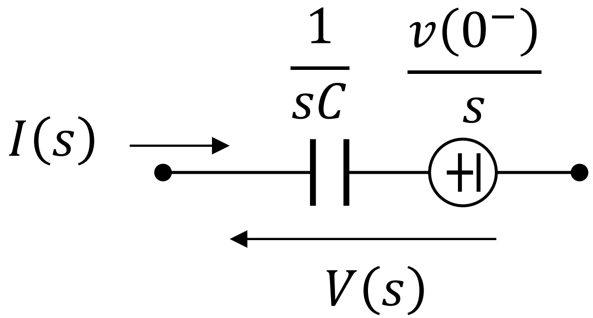
- コンデンサ
  - $i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$
    - アドミタンス表現

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

    - インピーダンス表現

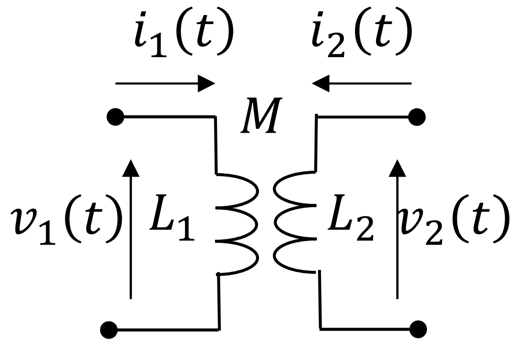
$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$





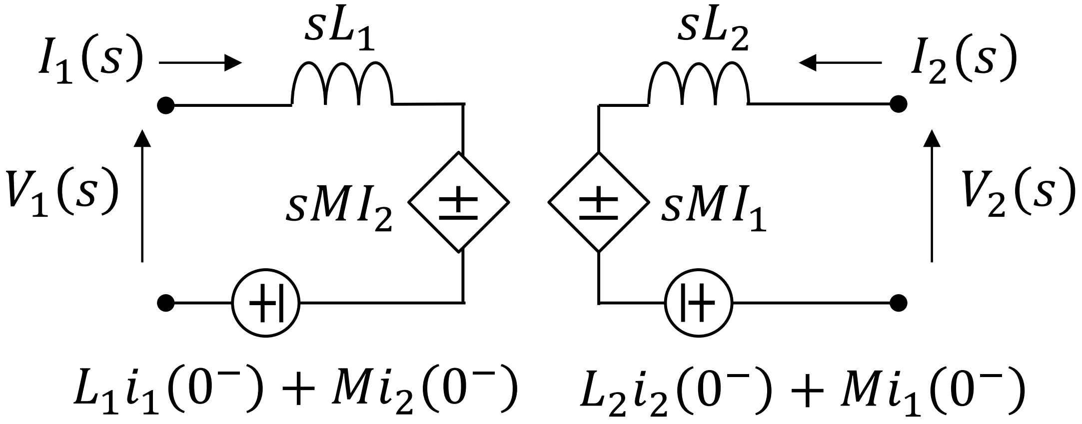
トランス

- 結合インダクタ(変圧器)
  - 自己インダクタンスL_1, L_2
  - 相互インダクタンスM
  - 結合係数$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$
  - 時間領域
    - $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$
    - $v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$
  - 複素領域
    - $V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - \left(L_1 i_1(0^-) + Mi_2(0^-)\right)$
    - $V_2(s) = sL_2 I_2(s) + sMI_1(s) - \left(L_2 i_2(0^-) + Mi_1(0^-)\right)$



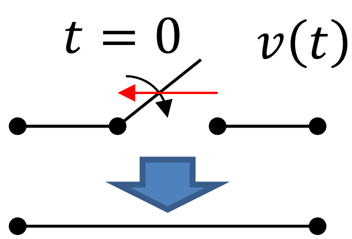
トランス

- 行列表現
  - $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{V}(s)=\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}, \boldsymbol{I}(s)=\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \boldsymbol{i}(0^-)=\begin{bmatrix} i_1(0^-) \\ i_2(0^-) \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{V}(s)=s\boldsymbol{L}\boldsymbol{I}(s)-\boldsymbol{L}\boldsymbol{i}(0^-)$
    - $\boldsymbol{L}$が正則であればアドミタンス表現可能



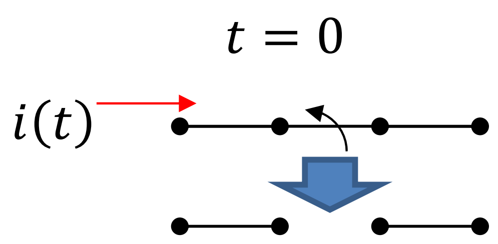
ラプラス変換による回路解析

- スイッチ　off→on
  - $t < 0$で直流定常状態
  - 閉スイッチ　$t = 0$でオン
    - 時間領域
      - $v(t)$=有限の値　　$t < 0$
      - $v(t) = 0$　　$t \geq 0$
    - 複素領域
      - $V(s) = \int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} v(t)dt = 0$
        - s領域では短絡枝



ラプラス変換による回路解析

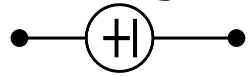
- スイッチ　on→off
  - $t < 0$で直流定常状態
  - 開スイッチ　$t = 0$でオフ
    - 時間領域
      - $i(t)$=有限の値　　$t < 0$
      - $i(t) = 0$　　$t \geq 0$
    - 複素領域
      - $I(s) = \int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} i(t)dt = 0$



ラプラス変換による回路解析

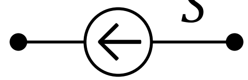
- 電源
  - 電圧源$e_s(t) = E$
    - $\mathcal{L}[e_s(t)] = E_s(s) = \int_0^{\infty} Ee^{-st}dt = \frac{-E}{S}(e^{\infty} - e^0) = \frac{E}{S}$

$E_s = \frac{E}{S}$



  - 電流源$j_s(t) = J$
    - $\mathcal{L}[j_s(t)] = J_s(s) = \int_0^{\infty} Je^{-st}dt = \frac{-J}{S}(e^{\infty} - e^0) = \frac{J}{S}$

$J_s = \frac{J}{S}$



- 線形時不変の素子で構成される回路網
  - S領域では電源を含む抵抗回路網の解析になる
    - 初期値が0の場合
      - $V(s) = Z(s)I(s)$　　　$Z(s) = R, sL, \frac{1}{sC}$
      - $I(s) = Y(s)V(s)$　　　$Y(s) = \frac{1}{R}, \frac{1}{sL}, sC$

部分分数分解

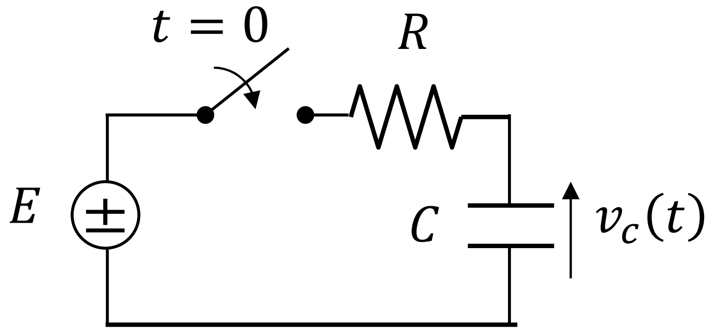
- $\dfrac{cs+d}{(s+a)(s+b)} = \dfrac{x}{s+a} + \dfrac{y}{s+b}$
  - $x = \dfrac{cs+d}{(s+a)(s+b)}(s+a)\Big|_{s=-a} = \dfrac{-ca+d}{-a+b}$
  - $y = \dfrac{cs+d}{(s+a)(s+b)}(s+b)\Big|_{s=-b} = \dfrac{-cb+d}{-b+a}$
  - $\dfrac{x}{s+a} + \dfrac{y}{s+b} = \dfrac{1}{s+a}\dfrac{-ca+d}{-a+b} + \dfrac{1}{s+b}\dfrac{-cb+d}{-b+a}$

$$= \frac{(ca-d)(s+b)+(-cb+d)(s+a)}{(s+a)(s+b)(a-b)}$$

$$= \frac{(ca-d-cb+d)s+(ca-d)b+(-cb+d)a}{(s+a)(s+b)(a-b)}$$

$$= \frac{c(a-b)s+(a-b)d}{(s+a)(s+b)(a-b)} = \frac{cs+d}{(s+a)(s+b)}$$

ラプラス変換による回路解析例



- t=0でスイッチオン
- RC回路の$t > 0$における応答
  - 節点方程式
    - $\dfrac{\frac{E}{S} - V_C(s)}{R} = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$
    - $V_C(s)\left\{sC + \frac{1}{R}\right\} = \dfrac{\frac{E}{s}}{R} + Cv_C(0^-)$
    - $V_C(s) = \dfrac{\frac{E}{sR} + Cv_C(0^-)}{sC + \frac{1}{R}} = \dfrac{E + sCRv_C(0^-)}{s(sCR+1)} = \dfrac{E}{s} + \dfrac{v_C(0^-) - E}{s + \frac{1}{CR}}$
  - 時間応答
    - $v_C(t) = E + [v_C(0^-) - E]e^{-\frac{t}{CR}}$