回路とシステム
第三回
ラプラス変換による回路解析

舟木　剛

2025年10月27日2限

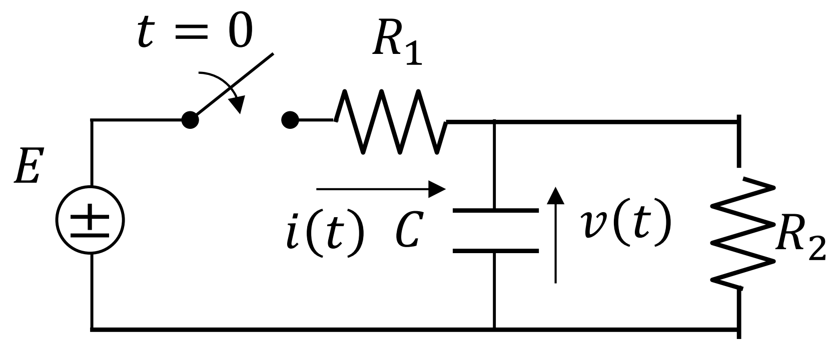
講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

ラプラス変換による回路解析

- 回路の過渡応答　→　微分方程式
- 線形時不変回路　→　ラプラス変換による常微分方程式の求解が可能
- ラプラス変換　時間領域→複素領域
  - $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
    - $\mathcal{L}[i_k(t)] = I_k(s), \mathcal{L}[v_k(t)] = V_k(s)$
- 逆変換
  - $f(t) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} F(s)e^{st}ds$

ラプラス変換による回路解析例



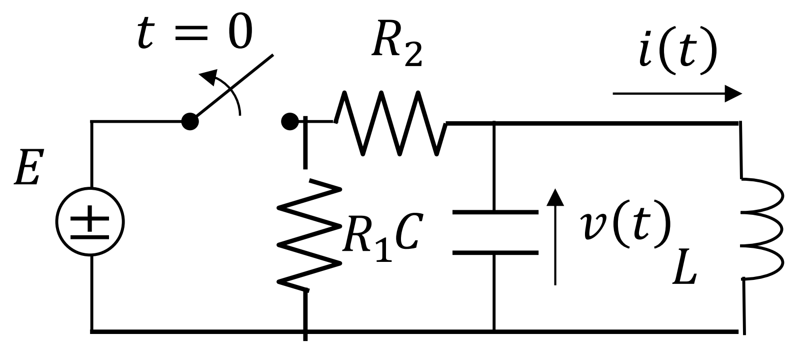
- t<0で定常状態$v(0^-)=0$
- t=0でスイッチオン
- 初期値は0
  - KVL:$-E+R_1 i(t)+v(t)=0$
    - $-\frac{E}{s}+R_1 I(s)+V(s)=0$
  - KCL:$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R_2}$
    - $I(s)=CsV(s)+\frac{V(s)}{R_2}$
  - $V=\frac{E}{R_1 s}\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC}=\frac{R_2 E}{R_1+R_2}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{Rc}}\right]$
  - $v(t)=\frac{R_2 E}{R_1+R_2}\left[1-e^{\frac{-t}{RC}}\right]$

$$-\frac{E}{s}+R_1\left[CsV(s)+\frac{V(s)}{R_2}\right]+V(s)=0$$

$$R=\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

ラプラス変換による回路解析例

- t<0で定常状態$v(0^-) = 0$
- t=0でスイッチオフ
- 初期値:$i(0_-) = \frac{E}{R_2}$
  - $v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \quad V(s) = L[sI(s) - i_0]$
- 初期値:$v(0_-) = 0$
  - $i_c(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow \quad I_C(s) = CsV(s)$
- KVL: $(R_1 + R_2)[i(t) + i_c(t)] + v(t) = 0$
  - $(R_1 + R_2)[I(s) + I_c(s)] + V(s) = 0$



ラプラス変換による回路解析例

- $V(s) = L[sI(s) - i_0]$
  - $sI(s) = \frac{V(s)}{L} + i_0$
  - $I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s}$
- $(R_1 + R_2)\left[CsV(s) + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s}\right] + V(s) = 0$
  - $CsV(s) + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s} + \frac{V(s)}{R_1+R_2} = 0$
  - $V(s)\left[Cs + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1+R_2}\right] = -\frac{i_0}{s}$

ラプラス変換による回路解析例

- $R_1 + R_2 = R$とおいて
  - $V(s)\ \left[Cs + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}\right] = V(s)\ \left[\frac{s^2RLC+R+sL}{sLR}\right] = -\frac{i_0}{s}$
  - $V(s) = -\frac{i_0}{s}\frac{sLR}{s^2RLC+R+sL} = -\frac{i_0LR}{s^2RLC+R+sL}$

$$= -\frac{i_0}{C}\frac{1}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

    - $s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow s = \frac{-\frac{1}{RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$
    - $v(t) = -\frac{i_0}{C}\left[e^{\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} + e^{\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}\right]$

ラプラス変換による回路解析例

- $I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s} = -\frac{i_0}{C}\frac{1}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}\frac{1}{sL} + \frac{i_0}{s}$
  - $I(s) = \frac{i_0}{sLC}\left[LC - \frac{1}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}\right]$

$$= \frac{i_0}{s} - \frac{s+\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

ラプラス変換による回路解析例

- $$\frac{s+\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}=\frac{a}{s-\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}+\frac{b}{s-\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}$$
  - $$s+\frac{1}{RC}=a\left[s-\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}\right]+b\left[s-\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}\right]$$
    $$=(a+b)s-\frac{1}{2}\left\{a\left[-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right]+b\left[-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right]\right\}$$
    - $a+b=1$
    - $$\frac{-2}{RC}=a\left[-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right]+b\left[-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right]$$
      $$=-(a+b)\frac{1}{RC}+(a-b)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}$$
      $$=-\frac{1}{RC}+(1-2a)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}$$

ラプラス変換による回路解析例

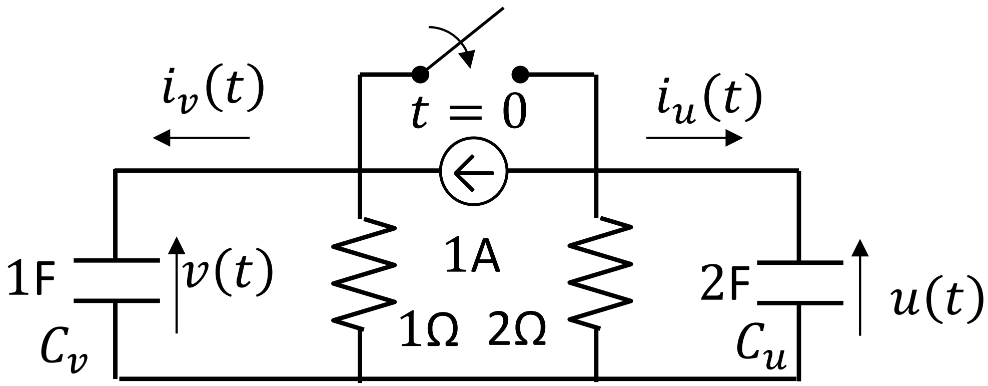
- $a=\frac{1-\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}, b=\frac{1+\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}$
- $I(s)=\frac{i_0}{s}-\frac{\frac{1-\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}}{s-\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}-\frac{\frac{1+\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}}{s-\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}$
- $i(t)=i_0-\frac{1-\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}e^{\frac{-\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}-\frac{1+\sqrt{\frac{L}{L-4R^2C}}}{2}e^{\frac{-\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}$

ラプラス変換による回路解析例

- $\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$の根号の中身について考える
  - $\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0$の場合　単調変化
  - $\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC} = 0$の場合　重根$te^{-\frac{1}{\sqrt{LC}}t}$
  - $\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$の場合　振動解
    - $\left(\frac{1}{RC}\right)^2 < \frac{4}{LC}$
    - $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

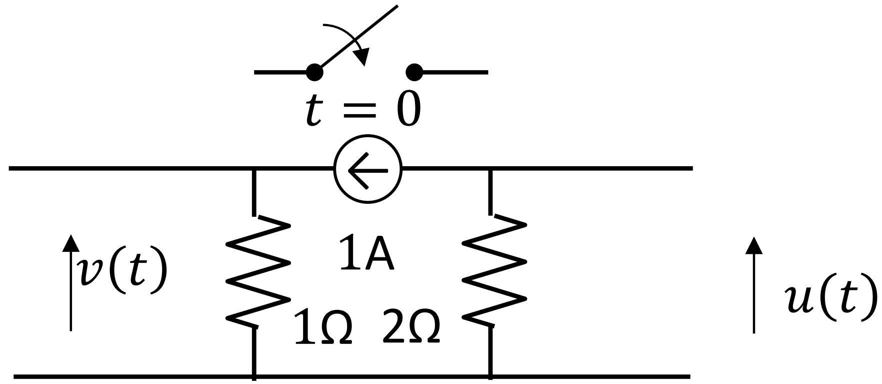
ラプラス変換による回路解析例

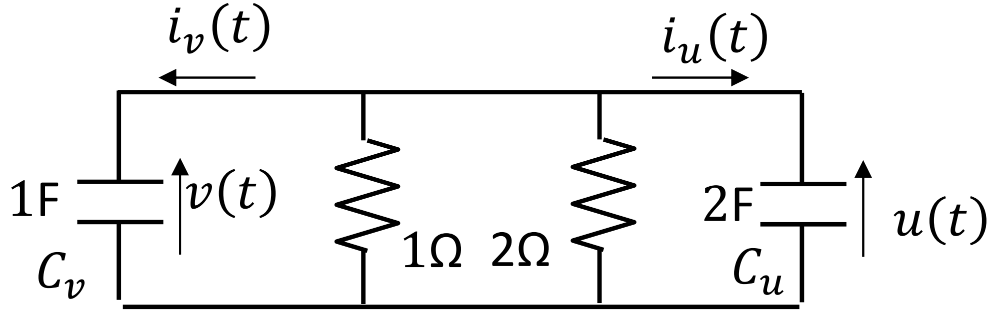
- $t < 0$で直流定常状態
- $t = 0$でスイッチオン
- $t \geq 0$での$v(t), u(t)$を求める

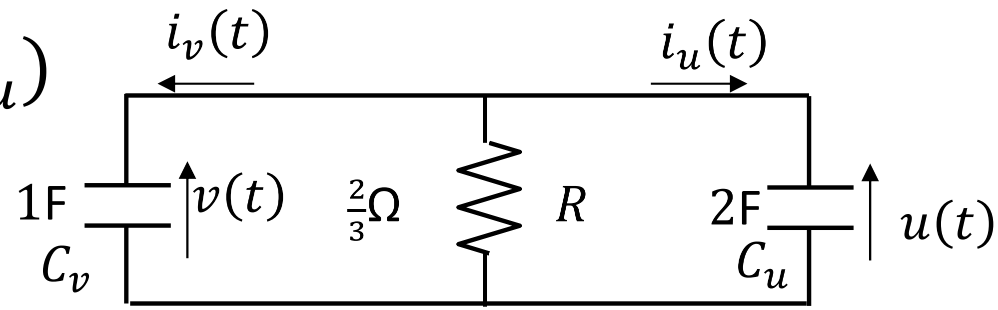


ラプラス変換による回路解析例

- $t < 0$で直流定常状態
  - $v(t) = 1 \times 1 = 1$ V
  - $u(t) = 2 \times -1 = -2$ V
- $t \geq 0$での応答
  - $i_v(t) = C_v \dfrac{dv(t)}{dt}$
    - $I_v(S) = C_v\{sV(s) - v_0\}$
  - $i_u(t) = C_u \dfrac{du(t)}{dt}$
    - $I_u(S) = C_u\{sU(s) - u_0\}$
  - $v(t) = u(t) = R(-i_v - i_u)$
    - $V(s) = U(S)$



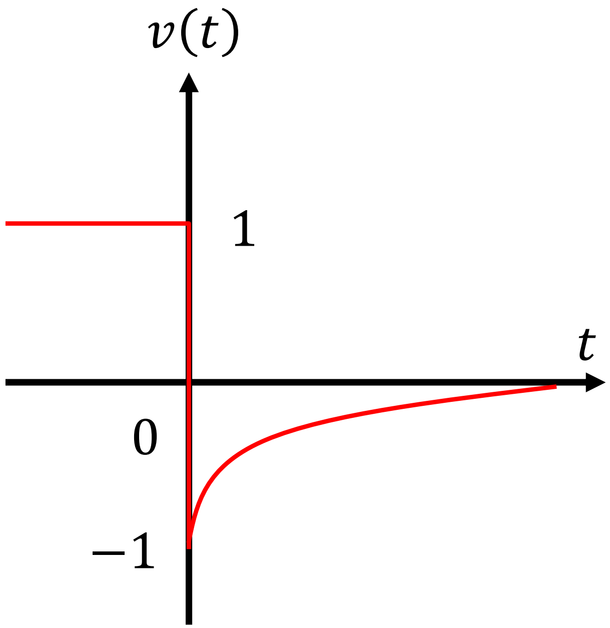


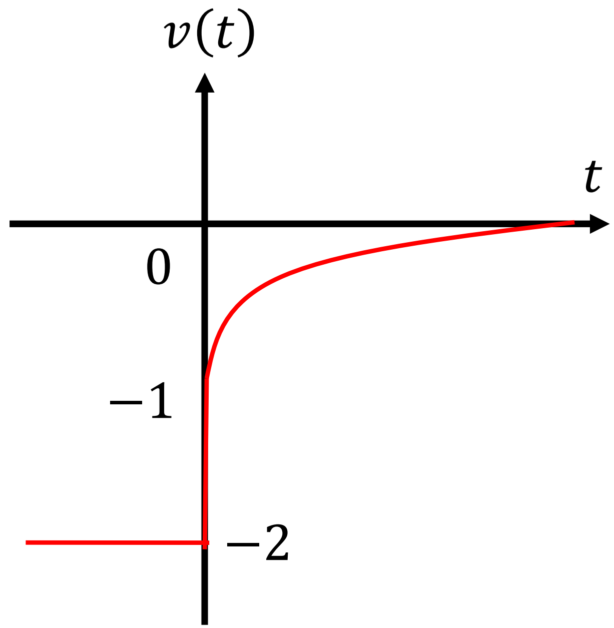


ラプラス変換による回路解析例

- $V(s) = -\frac{2}{3}\{I_v(S) + I_u(S)\}$
  - $I_v(S) = 1\{sV(s) - 1\}$
  - $I_u(S) = 2\{sU(s) + 2\} = 2\{sV(s) + 2\}$
- $V(s) = -\frac{2}{3}\left\{1\{sV(s) - 1\} + 2\{sV(s) + 2\}\right\}$
  $= -\frac{2}{3}\{3sV(s) + 3\} = -2\{sV(s) + 1\}$
- $V(s)\{1 + 2s\} = -2$
- $V(s) = -\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$
- $v(t) = -e^{-\frac{1}{2}t}$

ラプラス変換による回路解析例

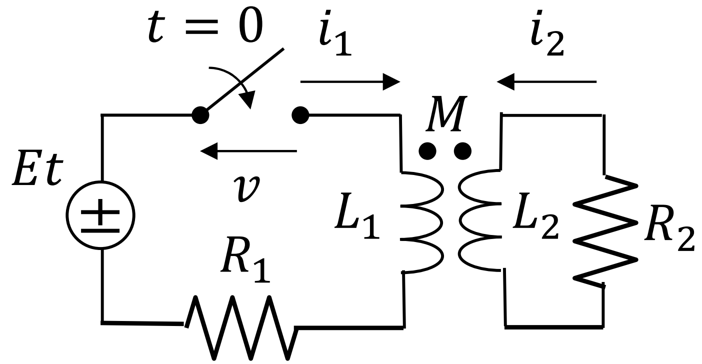


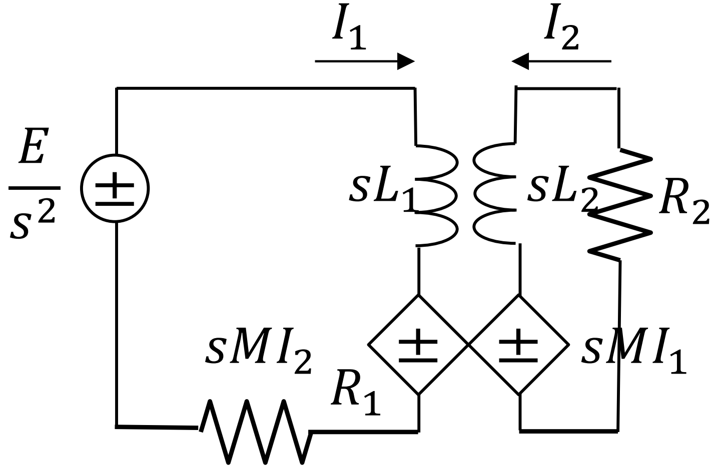


結合インダクタ(トランス)回路

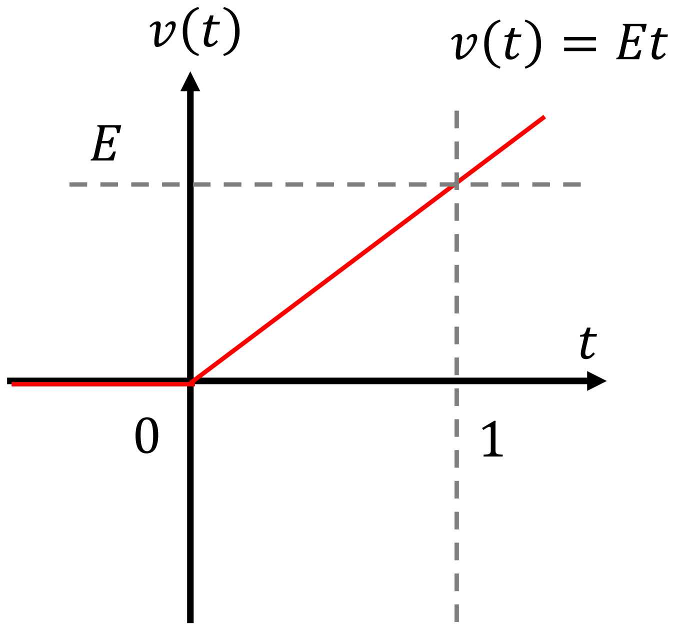
- t=0でスイッチオン，ランプ電圧源$Et \to \frac{E}{s^2}$
  - スイッチ　→　初期値0
- KVL
  - $(sL_1 + R_1)I_1(s) + sMI_2(s) = \frac{E}{s^2}$
  - $(sL_2 + R_2)I_2(s) + sMI_1(s) = 0$
- 行列表現
  - $\begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{(sL_1 + R_1)(sL_2 + R_2) - (sM)^2} \begin{bmatrix} sL_2 + R_2 & -sM \\ -sM & sL_1 + R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$





結合インダクタ(トランス)回路



結合インダクタ(トランス)回路

- $R_1 = 0.5\Omega, R_2 = 2\Omega, L_1 = 0.75\mathrm{H}\ , L_2 = 3\mathrm{H}\ ,$ $M = 0.5\mathrm{H}\ , E = 1\mathrm{V/s}$
  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2.25s^2+3s+1-0.25s^2} \begin{bmatrix} \frac{3s+2}{s^2} \\ -\frac{1}{2s} \end{bmatrix} =$
    $\begin{bmatrix} \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+0.5} \\ -\frac{1}{2s} - \frac{0.5}{s+1} + \frac{1}{s+0.5} \end{bmatrix}$

    $2s^2 + 3s + 1 = (2s+1)(s+1)$
  - $i_1(t) = 2t - 3 + e^{-t} + 2e^{-0.5t}$
  - $i_2(t) = -0.5 - 0.5e^{-t} + e^{-0.5t}$

結合インダクタ(トランス)回路