

回路とシステム

第五回

線形回路の解析

舟木 剛

2025年11月17日2限

講義計画

- 回路方程式 1回
 - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
 - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
 - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回
 - テブナン・ノートンの定理
 - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回
 - 2ポート回路の行列表現
 - 相反2ポート回路
 - 相互接続
 - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、π形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回
 - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
 - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
 - 平衡三相回路

回路の応答

- 節点 n 個, 枝 b 個の回路網
 - 節点電位ベクトル $E(s)$
 - 一つの節点を基準に選ぶ → $(n - 1)$ 次
 - 枝電流・枝電圧ベクトル $I(s), V(s)$
 - b 次
- KCL $AI(s) = 0$
- KVL $V(s) = A^T E(s)$
 - 既約接続行列 A $(n - 1) \times b$
- 枝電流と枝電圧の関係
$$M(s)V(s) + N(s)I(s) = FU(s) + Gx^0$$
 - M, N $b \times b$ の s の多項式
 - F, G 定数行列
 - $U(s)$ 入力電源
 - x^0 初期値

タブローア方程式での表現

- $$b \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I_b & 0 \\ b & 0 & M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ FU(s) + Gx^0 \end{bmatrix}$$
KCL
KVL
特性式
- $$T \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$
- $$\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0 = H(s)U(s) + Q(s)x^0$$
 - 零状態応答
 - $H(s)U(s)$ 初期値 x^0 を 0 とした入力 $U(s)$ に対する応答
 - 零入力応答
 - $Q(s)x^0$ 入力 $U(s)$ を 0 とした初期値 x^0 に対する応答
 - 全応答 = 零状態応答 + 零入力応答

伝達関数

- 入力に対する出力の比
- 伝達関数 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$
 - s の分子多項式 $N(s)$ 、分母多項式 $D(s)$
 - 零点 $N(s) = 0$ の根 $s = z_i$
 - 極 $D(s) = 0$ の根 $s = p_i$
 - 極によりインパルス応答が決まる

伝達関数

- 伝達関数の部分分数展開

- $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = a_m s^m + \dots + a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{s-p_i}$
 - $m = \deg N(s) - \deg D(s) \geq 0$ の場合、多項式に a_i の成分が現れる
 - 分子の次数 $\deg N(s) = n + m$
 - 分母の次数 $\deg D(s) = n$
 - $\deg N(s) < \deg D(s)$ の場合分数のみになる
 - 繊密にプロパー

安定伝達関数

- インパルス応答

- $h(t) = a_m \delta^{(m)}(t) + \cdots + a_0 \delta(t) + \sum_{i=1} L_i e^{p_i t} 1_+(t)$

- $t \neq 0$ に対して $a_i \delta^{(i)}(t) = 0$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} a_i \delta^{(i)}(t) = 0$

- すべて極の実部 $\text{Re}[p_i]$ が $\text{Re}[p_i] < 0$

- $t \rightarrow \infty$ で インパルス応答は 0 に収束

- $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_i t} = 0$

- 伝達関数は安定

正弦波定常応答

- 回路が安定な伝達関数で表される場合
 - $h(t) = a_m \delta^{(m)}(t) + \cdots + a_0 \delta(t) + g(t)$
 - $\text{Re}[p_i] < 0 \rightarrow g(\infty) = 0$
 - $H(s) = a_m s^m + \cdots + a_0 + G(s)$
 - $G(s) = \frac{N'(s)}{(s-p_1)\cdots(s-p_N)}$
 - 正弦波定常状態(周期定常状態)
 - 回路の入力電源を正弦波交流とすると、十分時間の経た後の応答は入力と同じ周波数の正弦波となる
 - 位相・振幅はその限りではない

正弦波定常応答

- 零状態応答の正弦波定常状態
 - 初期値0, 安定伝達関数へ入力 $H(s)$
 - $t = 0$ で角周波数 ω の複素正弦波
 - $u(t) = U_M e^{j\omega t}$ を入力
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = H(j\omega)u(t) = H(j\omega)U_M e^{j\omega t}$
 - 出力の周波数は入力と同じ, 大きさは $H(j\omega)$ 倍
 - 振幅と位相が変わる

複素正弦波

- $\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$
- $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$
- $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

正弦波定常応答

- s 領域での表現

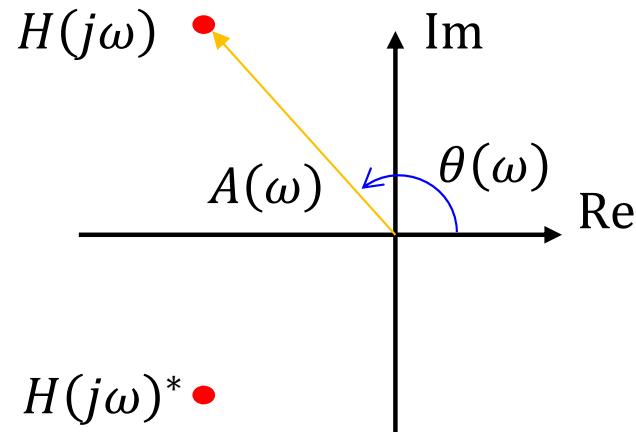
- $\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[U_M e^{j\omega t}] = \frac{U_M}{s-j\omega}$
- $$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{U_M}{s-j\omega} \\ = a_m s^m + \cdots + a_0 + \frac{K_0}{s-j\omega} + \sum_{i=1} \frac{L_i}{s-p_i}$$
- $t \rightarrow \infty$ で $\frac{K_0}{s-j\omega}$ のみ残る
- 最終値定理 $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
 - s の多項式は0に収束 $s \rightarrow 0$ とすると周波数が0となるので、正弦波定常状態の応答には使えない
 - $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{L_i}{s-p_i} = 0$

正弦波定常応答

- K_0 を求める
 - $$K_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)Y(s)$$
$$= \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)H(s) \frac{U_M}{s - j\omega} = H(j\omega)U_M$$
- $H(j\omega) \rightarrow s$ に $j\omega$ を入れて周波数応答となる理由
 - $$H(j\omega) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$
 - インパルス応答 $h(t)$ のフーリエ変換と等価

正弦波定常応答

- 周波数応答の複素共役
 - $H(j\omega)^* = H(-j\omega)$
- 周波数応答の極座標表示
 - $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$
 - $A(\omega)$ は $H(j\omega)$ の振幅, $\theta(\omega)$ は $H(j\omega)$ の偏角



正弦波定常応答

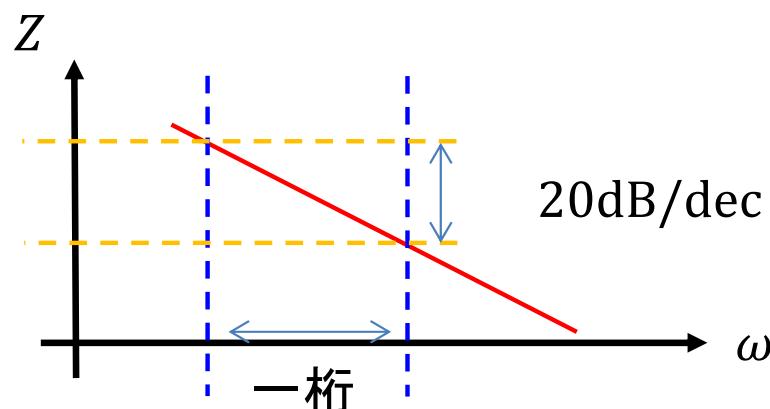
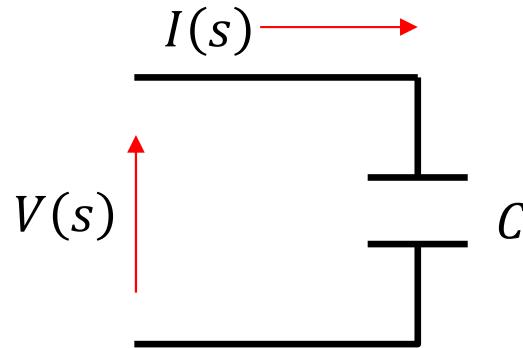
- 実数値正弦波入力に対する応答

$$\bullet u(t) = U_M \cos \omega t = \frac{U_M}{2} e^{j\omega t} + \frac{U_M}{2} e^{-j\omega t}$$

$$\begin{aligned}\bullet y(t) &= H(j\omega) \frac{U_M}{2} e^{j\omega t} + H(-j\omega) \frac{U_M}{2} e^{-j\omega t} \\ &= \operatorname{Re}[H(j\omega) U_M e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[A(\omega) U_M e^{j(\omega t + \theta(\omega))}] \\ &= A(\omega) U_M \cos(\omega t + \theta(\omega))\end{aligned}$$

回路の周波数応答

- 入力 電流: $I(s)$
- 出力 電圧: $V(s)$
- 伝達関数: $H(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$
- 周波数応答: $H(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C} = Z(j\omega)$



$$20\text{dB/dec} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega C} \right|$$

$$A(\omega) = \left| \frac{1}{j\omega C} \right|$$

$$\text{位相: } \angle \frac{1}{j\omega C} = -90\text{deg}$$

回路の周波数応答

- 入力 電圧: $V_1(s)$
- 出力 電圧: $V_2(s)$

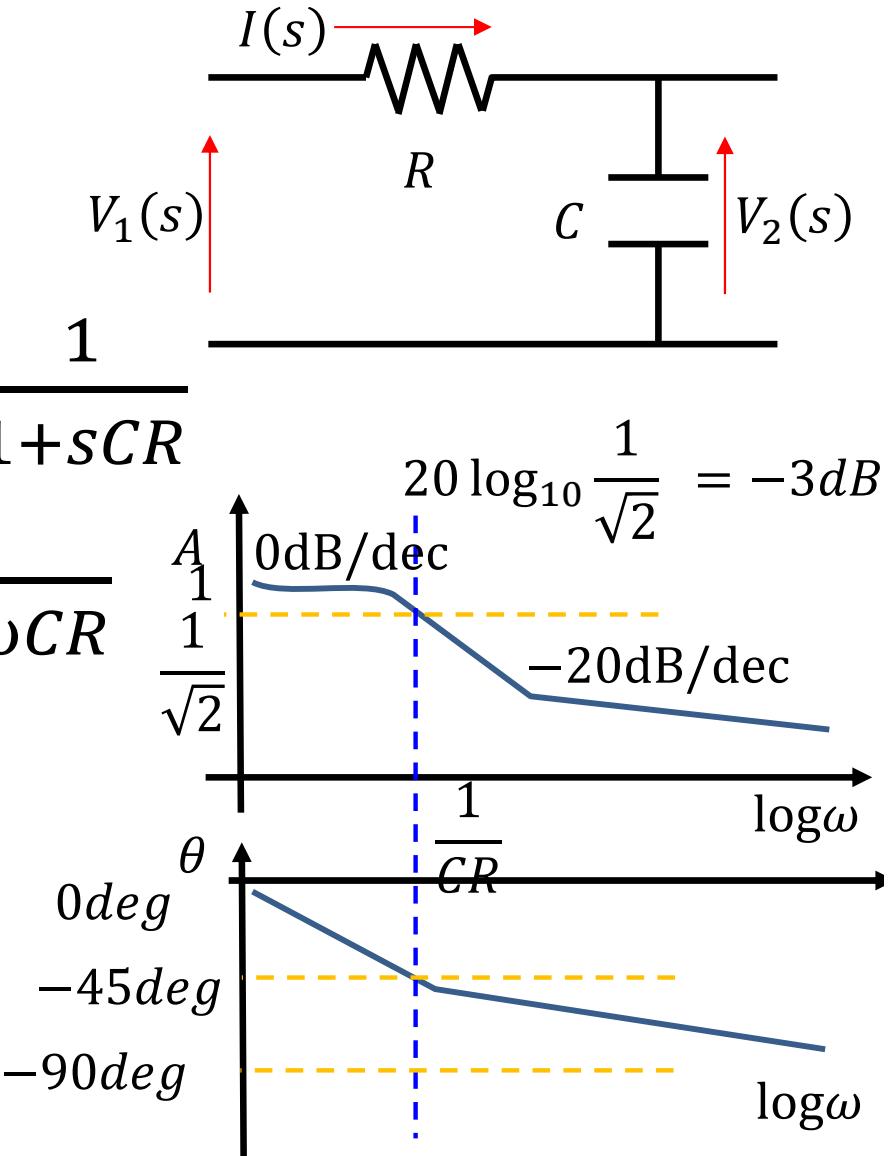
- 伝達関数: $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1+sCR}$

- 周波数応答: $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega CR}$

- ゲイン: $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$

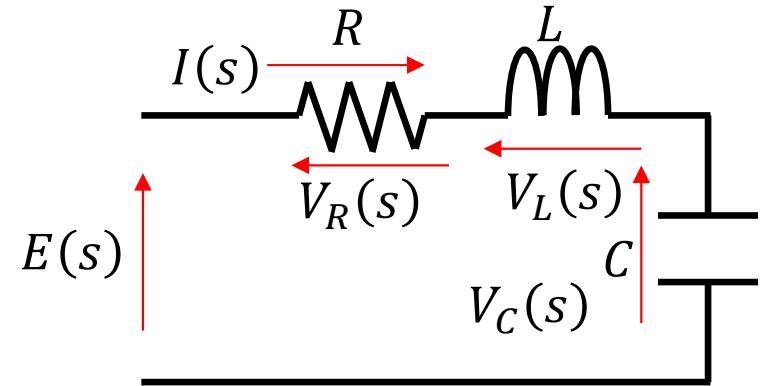
- 位相: $\theta(\omega) = -\tan^{-1} \omega CR$

- 折れ点: $\omega CR = 1$



回路の周波数応答

- 入力 電圧: $E(s)$
- 出力 電圧: $V_R(s)$
- 伝達関数: $H(s) = \frac{V_R(s)}{E(s)} = \frac{R}{R + sL + 1/(sC)} = \frac{CRs}{LCs^2 + CRs + 1}$
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \omega_0 \frac{L}{R}$
- $H(s) = \frac{(\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$



回路の周波数応答

- 周波数伝達関数:
$$H(j\omega) = \frac{(\omega_0/Q)j\omega}{(j\omega)^2 + (\omega_0/Q)j\omega + \omega_0^2}$$
$$= \frac{j\omega(\omega_0/Q)}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega(\omega_0/Q)}$$
$$= \frac{j\omega(\omega_0/Q)\{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega(\omega_0/Q)\}}{\{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega(\omega_0/Q)\}\{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega(\omega_0/Q)\}}$$
$$= \frac{\{\omega(\omega_0/Q)\} + j\omega(\omega_0/Q)\{\omega_0^2 - \omega^2\}}{\{\omega_0^2 - \omega^2\}^2 + \{\omega(\omega_0/Q)\}^2}$$

回路の周波数応答

- ゲイン:
$$A(\omega) = \frac{(\omega_0/Q)\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0/Q)^2\omega^2}}$$
 - $\omega = \omega_0$ で最大値となる $A(\omega_0) = 1$
 - $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} A(\omega_0)$ となる周波数
 - $$\frac{(\omega_0/Q)\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0/Q)^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
 - $\omega^2 \pm (\omega_0/Q)\omega - \omega_0^2 = 0$
 - $$\omega = \frac{\omega_0}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \pm \frac{1}{Q} \right\}$$

回路の周波数応答

$$\text{ゲイン: } A(\omega) = \frac{(\omega_0/Q)\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0/Q)^2\omega^2}}$$

$$\text{位相: } \tan^{-1} \frac{(\omega_0/Q)\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0/Q)^2\omega^2}$$

