# 応用電力変換工学

舟木剛

第2回　本日のテーマ

電力変換を理解するため

電力・電力量について復習・展開する

# 電力とエネルギー

- (瞬時)電力
  - 時変量

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- エネルギー
  - 瞬時電力の時間積分

$$W = \int_{t1}^{t2} p(t)dt$$

電圧・電流の単位を各々ボルト，アンペアとすると
電力・エネルギーの単位は各々ワット，ジュールとなる

- 平均電力
  - 周期Tで変化する電圧・電流に対する電力の平均値
  - 平均電力を有効電力とも言う

$$P = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} p(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} v(t)i(t)dt$$

$$P = \frac{W}{T}$$

# パワエレ回路でよく出くわす特別なケース

- 直流電源（電池など）や直流負荷の場合
  - 一定の直流電圧源 $v(t) = V_{dc}$ に対して，電源（負荷）電流 $i(t)$ が周期Tで変化する場合
    平均電力は
    $$P_{dc} = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} v(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} V_{dc}i(t)dt$$
  - 直流電圧は一定 $$P_{dc} = V_{dc}\left[\frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} i(t)dt\right] = V_{dc}I_{avg}$$
  - 平均電力は電圧と平均電流の積で表される

但し $$I_{avg} = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} i(t)dt$$

# L, Cにおける電力（平均電力と瞬時電力）

- 周期定常状態を考える

$$i(t+T)=i(t)$$

$$v(t+T)=v(t)$$

周期 $T$

- Lに蓄えられるエネルギー

$$w(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)$$

- 周期定常状態でLが消費する平均電力

$$P_L=0$$

# L, Cにおける電力（平均電力と瞬時電力）

- 周期定常状態において一周期後には同じ値に戻る。初期値 $i(t_0)$ とLにおける電圧・電流の関係より

$$i(t_0+T)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t)dt+i(t_0)$$

- 周期解の関係　$$i(t_0+T)-i(t_0)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t)dt=0$$

- Lの平均電圧　$$avg[v_L(t)]=V_L=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t)dt=0$$

# L, Cにおける電力（平均電力と瞬時電力）

- 周期定常状態でLが消費する平均電力

$$P_C = 0$$

- 周期解の関係

$$v(t_0 + T) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t)dt = 0$$

- Cの平均電流

$$avg[i_C(t)] = I_C = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t)dt = 0$$

# スイッチング時におけるL,Cに蓄えられたエネルギーの行方

- Lに流れていた電流をスイッチで急に切ると
  - エネルギーを消費するため過電圧発生
  - 逃げ道を抵抗で作る　→　損失
  - 蓄えているエネルギーを回生することで効率改善

スイッチングデバイスにつながれたLと，R+ダイオードスナバの絵

周期T, t=0でターンオン，t=t1でターンオフ

# スイッチング時におけるL,Cに蓄えられたエネルギーの行方

- オン期間中(0<t<t1)
  - Lに印加されている電圧 $v_L = V_{CC}$
  - Lに流れる電流 $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\lambda)d\lambda + i_L(0) = \frac{1}{L}\int_0^t V_{CC}d\lambda + 0 = \frac{V_{CC}t}{L}$
  - 電源源流 $i_S(t) = i_L(t)$

- オフ期間中(t1<t<T)
  - Lの電流初期値 $i_L(t_1) = \frac{V_{CC}t_1}{L}$
  - Lに流れる電流 $i_L(t) = i_L(t_1)e^{-(t-t_1)/\tau} = \left(\frac{V_{CC}t_1}{L}\right)e^{-(t-t_1)/\tau}$ $\tau = L/R$
  - 電源源流 $i_S(t) = 0$

# スイッチング時におけるL,Cに蓄えられたエネルギーの行方

- 電源が供給する平均電力

$$P_S = V_S I_S = V_{CC}\left[\frac{1}{T}\int_0^T i_s(t)d\lambda\right]$$

$$= V_{CC}\left[\frac{1}{T}\int_0^{t_1}\left(\frac{V_{CC}t}{L}\right)dt + \frac{1}{T}\int_{t_1}^{T} 0dt\right] = \frac{(V_{CC}t_1)^2}{2LT}$$

$$P_R = P_S = \frac{(V_{CC}t_1)^2}{2LT}$$

- 別解
  - Lに蓄えられるピークエネルギーが全て消費されることから

$$W = \frac{1}{2}Li^2(t_1) = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_{CC}t_1}{L}\right)^2 = \frac{(V_{CC}t_1)^2}{2L}$$

$$P_R = \frac{W}{T} = \frac{(V_{CC}t_1)^2}{2LT}$$

# スイッチング時におけるL,Cに蓄えられたエネルギーの行方（回生スナバ）

- Lに流れていた電流をスイッチで急に切ると
  - エネルギーを消費するため過電圧発生
  - 逃げ道を抵抗で作る　→　損失
  - 蓄えているエネルギーを回生する(電源に戻す)ことで効率改善

スイッチングデバイスにつながれたLと，R+ダイオードスナバの絵

周期T, t=0でターンオン，t=t1でターンオフ

# スイッチング時におけるL,Cに蓄えられたエネルギーの行方

- オン期間中(0<t<t1)
  - Lに印加されている電圧
  - Lに流れる電流
  - 電源源流

$$v_L = V_{CC}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\lambda)d\lambda + i_L(0) = \frac{1}{L}\int_0^t V_{CC}d\lambda + 0 = \frac{V_{CC}t}{L}$$

$$i_S(t) = i_L(t)$$

- オフ期間中(t1<t<T)
  - Lに印加されている電圧
  - Lに流れる電流
  - 電源源流

$$v_L = -V_{CC}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t_1}^t v_L(\lambda)d\lambda + i_L(t_1) = \frac{1}{L}\int_{t_1}^t (-V_{CC})d\lambda + \frac{V_{CC}t_1}{L}$$

$$= \frac{V_{CC}}{L}\left[(t_1 - t) + t_1\right] = \frac{V_{CC}}{L}\left[2t_1 - t\right]$$

$$i_S(t) = -i_L(t)$$

但し $t_1 < t < 2t_1$ ⇒ ダイオードがオフになる

# 電圧・電流の実効値

- 周期電圧波形の実効値は，抵抗負荷の平均電力により表される
  - 直流電圧の場合
  - 周期電圧波形の場合

$$P = \frac{V_{dc}{}^2}{R}$$

$$P = \frac{V_{eff}{}^2}{R}$$

電力の式より

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v(t)^2}{R}dt = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt\right]$$

$$P = \frac{V_{eff}{}^2}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt\right]$$

したがって，実効値は次のように表される

$$V_{eff}{}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt \qquad V_{eff} = V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt}$$

電流も同様

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$$

# 皮相電力(Apparent power)と力率(Power factor)

- 皮相電力は実効値で表した電圧・電流積として定義
  - 変圧器の定格表示等で使用
  - 交流回路では複素電力の振幅に相当

$$S = V_{rms} I_{rms}$$

- 力率は皮相電力に対する平均電力の比として定義

$$pf = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{rms} I_{rms}}$$

  - 交流回路では電圧・電流の位相差に対する余弦で表される

$$pf = \cos\theta$$

# 正弦波交流回路における電力

- 線形回路・定常状態
  - 電圧 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$
  - 電流 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$
  - 瞬時電力 $p(t) = v(t) i(t) = [V_m \cos(\omega t + \theta)][I_m \cos(\omega t + \phi)]$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$ より

変形して

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t + \theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)]$$

# 正弦波交流回路における電力

– 平均電力

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{V_m I_m}{2}\int_0^T \left[\cos(2\omega t + \theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)\right]dt$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta - \phi) = V_{rms} I_{rms}\cos(\theta - \phi)$$

力率

但し $V_{rms} = V_{rm}/\sqrt{2},\ I_{rms} = I_{rm}/\sqrt{2}$

– 無効電力

- ½サイクルで溜まって，½サイクルで放出されるエネルギー

$$Q = V_{rms} I_{rms}\sin(\theta - \phi)$$

複素電力 $S = P + jQ = \overline{V}_{rms}\overline{I}_{rms}^{\ *}$

# 非正弦波周期波形に対する電力

– フーリエ級数として表す

一般的な表記

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

別表記

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} \qquad \theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$f(t)$の実効値のフーリエ級数表示

$$F_{rms} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} F_{n,rms}{}^2} = \sqrt{a_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

# フーリエ級数による平均電力の表示

– 電圧 $$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

– 電流 $$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

– 電力 $$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t) i(t) dt$$

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{n,rms} I_{n,rms} \cos(\theta_n - \phi_n)$$

# 正弦波電源と非線形負荷

- 電圧（正弦波）　$v(t) = V_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$
- 電流（非正弦波）$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$
- 電力

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_n - \phi_n)$$

$$= 0 I_0 + \frac{V_1 I_1}{2} \cos(\theta_1 - \phi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_n - \phi_n)$$

$$= \frac{V_1 I_1}{2} \cos(\theta_1 - \phi_1) = V_{1,rms} I_{1,rms} \cos(\theta_1 - \phi_1)$$

- 力率

$$pf = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{rms} I_{rms}} = \frac{V_{1,rms} I_{1,rms}}{V_{1,rms} I_{rms}} \cos(\theta_1 - \phi_1) = \frac{I_{1,rms}}{I_{rms}} \cos(\theta_1 - \phi_1)$$

但し　$I_{rms} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,rms}{}^2} = \sqrt{I_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{I_n}{\sqrt{2}} \right)^2}$

# 歪率

- 歪率
  - 波形実効値に対する基本波成分実効値

$$DF = \frac{I_{1,rms}}{I_{rms}}$$

- 歪率と力率の関係
  - 歪により力率が悪化する

$$pf = \left[\cos(\theta_1 - \phi_1)\right]DF$$

- 総合歪率
  - 基本波成分に対するそれ以外の成分

$$THD = \sqrt{\frac{\sum_{n \neq 1}^{\infty} I_{n,rms}{}^2}{I_{1,rms}{}^2}} = \sqrt{\frac{I_{rms}{}^2 - I_{1,rms}{}^2}{I_{1,rms}{}^2}}$$

- 総合歪率と歪率の関係

$$DF = \sqrt{\frac{1}{1 + (THD)^2}}$$

- Distortion Volt-Ampare

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$$

但し

$$D = V_{1,rms}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,rms}{}^2}$$

- Form Factor $\dfrac{I_{rms}}{I_{avg}}$
- Crest Factor $\dfrac{I_{peak}}{I_{rms}}$