応用電力変換工学

舟木剛

第4回　本日のテーマ
続直流-直流変換
および状態空間平均化法

平成16年11月10日

理想的ではない場合

- これまでの解析で用いた仮定
  - 電流の計算でCの電圧一定
  - Cukコンバータではしの電流一定
  - 理想スイッチ
  - コンデンサは容量成分のみ
  - リアクトルは誘導成分のみ
- 理想的でない場合どうなるか?

Cが大きくないとき
バックコンバータ･スイッチオン時

- Lに印加されている電圧

$$V_S - v_O = L\frac{di_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad V_S - V_O = L\left(sI_L - i_{L,0}\right) \qquad ①$$

- Cに流れる電流

ON時初期値

$$i_C = C\frac{dv_O}{dt} \quad \Rightarrow \quad I_C = C\left(sV_O - v_{O,0}\right) \qquad ②$$

- 負荷･C･Lに流れる電流の関係

$$i_L = i_R + i_C \quad \Rightarrow \quad I_L = I_R + I_C \qquad ③$$

- 負荷電流

$$i_R = \frac{V_O}{R} \quad \Rightarrow \quad I_R = \frac{V_O}{R} \qquad ④$$

Cが大きくないとき
バックコンバータ・スイッチオン時

- ①より

$$V_O = V_S - L\left(sI_L - i_{L,0}\right) = V_S - sLI_L + Li_{L,0} \qquad ⑤$$

- ②③④より

$$I_L = I_R + I_C = \frac{V_O}{R} + C\left(sV_O - v_{O,0}\right) = V_O\left(\frac{1}{R} + sC\right) - cv_{O,0} \qquad ⑥$$

- ⑤⑥より

$$I_L = \left(V_S - sLI_L + Li_{L,0}\right)\left(\frac{1}{R} + sC\right) - cv_{O,0}$$

$$\Rightarrow \quad I_L\left[1 + sL\left(\frac{1}{R} + sC\right)\right] = \left(V_S + Li_{L,0}\right)\left(\frac{1}{R} + sC\right) - cv_{O,0}$$

Cが大きくないとき
バックコンバータ・スイッチオン時

$$I_L\left(s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}\right)=s\left(\frac{V_S}{L}+i_{L,0}\right)+\frac{V_S}{LCR}+\frac{i_{L,0}}{RC}-\frac{v_{O,0}}{L}$$

$$I_L=\frac{s\left(\frac{V_S}{L}+i_{L,0}\right)+\frac{V_S}{LCR}+\frac{i_{L,0}}{RC}-\frac{v_{O,0}}{L}}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}=\frac{A}{s+\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}+\frac{B}{s+\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}}$$

この形で解を求める

$$=\frac{sA+\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}A+sB+\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}B}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

$$=\frac{s(A+B)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{RC}(A+B)+(-A+B)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right\}}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

A,Bには次式の関係

Cが大きくないとき
バックコンバータ･スイッチオン時

$$\frac{V_S}{L}+i_{L,0}=A+B \qquad ⑦$$

$$\frac{V_S}{LCR}+\frac{i_{L,0}}{RC}-\frac{v_{O,0}}{L}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{RC}(A+B)+(-A+B)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right\} \qquad ⑧$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{RC}\left(\frac{V_S}{L}+i_{L,0}\right)+(-A+B)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_S}{LCR}+\frac{i_{L,0}}{RC}-\frac{2v_{O,0}}{L}=(-A+B)\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}$$

$$\begin{cases} V_S+Li_{L,0}-2RCv_{O,0}=(-A+B)\sqrt{1-4LCR^2} \\ \left(\frac{V_S}{L}+i_{L,0}\right)\sqrt{1-4LCR^2}=(A+B)\sqrt{1-4LCR^2} \end{cases}$$

A,Bを求める

Cが大きくないとき
バックコンバータ・スイッチオン時

A,Bを求めるために整理して

$$\begin{cases} V_S + Li_{L,0} - 2RCv_{O,0} = (-A+B)\sqrt{1-4LCR^2} \\ \left(V_S + Li_{L,0}\right)\dfrac{\sqrt{1-4LCR^2}}{L} = (A+B)\sqrt{1-4LCR^2} \end{cases}$$

片々引く

$$2A\sqrt{1-4LCR^2} = \left(V_S + Li_{L,0}\right)\left(\frac{\sqrt{1-4LCR^2}}{L} - 1\right) + 2RCv_{O,0}$$

$$= \left(V_S + Li_{L,0}\right)\frac{\sqrt{1-4LCR^2}}{L} - \left(V_S + Li_{L,0}\right) + 2RCv_{O,0}$$

片々足す

$$2B\sqrt{1-4LCR^2} = \left(V_S + Li_{L,0}\right)\left(\frac{\sqrt{1-4LCR^2}}{L} + 1\right) - 2RCv_{O,0}$$

$$= \left(V_S + Li_{L,0}\right)\frac{\sqrt{1-4LCR^2}}{L} + \left(V_S + Li_{L,0}\right) - 2RCv_{O,0}$$

Cが大きくないとき バックコンバータ・スイッチオン時

A,Bが求まる

$$\begin{cases} A = \dfrac{V_S + Li_{L,0}}{2L} - \dfrac{V_S + Li_{L,0} - 2RCv_{O,0}}{2\sqrt{1-4LCR^2}} \\ B = \dfrac{V_S + Li_{L,0}}{2L} + \dfrac{V_S + Li_{L,0} - 2RCv_{O,0}}{2\sqrt{1-4LCR^2}} \end{cases}$$

リアクトル電流，出力電圧は次式であらわされる

$$i_L = Ae^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} + Be^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}$$

$$v_O = V_S - L\frac{di_L}{dt}$$

$$= V_S + L\left[A\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} + B\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} \right]$$

Cが大きくないとき バックコンバータ・スイッチオン時

スイッチオン期間終了時の境界条件は，オン時間Ton=DTを代入して求まる

$$
\begin{cases}
i_{L,T_{on}} = Ae^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} + Be^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} \\
v_{O,T_{on}} = V_S + L\left[A\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} + B\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT}\right]
\end{cases}
$$

Cが大きくないとき
バックコンバータ･スイッチオフ時

- Lに印加されている電圧

$$-v_O = L\frac{di_L}{dt}$$

オン時のVsを零にしたものと同じ。
初期値は，オン終了時点の値

$$i_{L,T_{on}}, v_{O,T_{on}}$$

- Cに流れる電流

$$i_C = C\frac{dv_O}{dt}$$

- 負荷･C･Lに流れる電流の関係

$$i_L = i_R + i_C$$

- 負荷電流

$$i_R = \frac{V_O}{R}$$

Cが大きくないとき
バックコンバータ･スイッチオフ時

$$\begin{cases} A' = \dfrac{Li_{L,T_{on}}}{2L} - \dfrac{Li_{L,T_{on}} - 2RCv_{O,T_{on}}}{2\sqrt{1-4LCR^2}} \\ B' = \dfrac{Li_{L,T_{on}}}{2L} + \dfrac{Li_{L,T_{on}} - 2RCv_{O,T_{on}}}{2\sqrt{1-4LCR^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_L = A'e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} + B'e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} \\ v_O = L\left[A'\dfrac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t} + B'\dfrac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}t}\right] \end{cases}$$

スイッチオフ期間終了時の境界条件は，オン時の初期値。オフ時間Toff-Ton=(1-D)Tを代入して

$$\begin{cases} i_{L,0} = A'e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} + B'e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} \\ v_{O,0} = L\left[A'\dfrac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} + B'\dfrac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T}\right] \end{cases}$$

Cが大きくないとき バックコンバータの各値

$$
\begin{cases}
A=\dfrac{V_S+Li_{L,0}}{2L}-\dfrac{V_S+Li_{L,0}-2RCv_{O,0}}{2\sqrt{1-4LCR^2}}\\[2ex]
B=\dfrac{V_S+Li_{L,0}}{2L}+\dfrac{V_S+Li_{L,0}-2RCv_{O,0}}{2\sqrt{1-4LCR^2}}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
A'=\dfrac{Li_{L,T_{on}}}{2L}-\dfrac{Li_{L,T_{on}}-2RCv_{O,T_{on}}}{2\sqrt{1-4LCR^2}}\\[2ex]
B'=\dfrac{Li_{L,T_{on}}}{2L}+\dfrac{Li_{L,T_{on}}-2RCv_{O,T_{on}}}{2\sqrt{1-4LCR^2}}
\end{cases}
$$

8元一次
連立方程式
を解く

$$
\begin{cases}
i_{L,0}=A'e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T}+B'e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T}\\[3ex]
v_{O,0}=L\left[A'\dfrac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T}+B'\dfrac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T}\right]
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
i_{L,T_{on}}=Ae^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT}+Be^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT}\\[3ex]
v_{O,T_{on}}=V_S+L\left[A\dfrac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT}+B\dfrac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT}\right]
\end{cases}
$$

Cが大きくないとき バックコンバータの各値

Ax=B

$$x^t = \begin{bmatrix} A & B & A' & B' & i_{L,0} & v_{O,0} & i_{L,T_{on}} & v_{O,T_{on}} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{matrix}
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} & e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} \\
0 & 0 & L\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} & L\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}(1-D)T} \\
e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} & e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} & 0 & 0 \\
L\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} & L\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}e^{-\frac{\frac{1}{RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}DT} & 0 & 0
\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}
\frac{1}{2}-\frac{L}{2\sqrt{1-4LCR^2}} & \frac{RC}{\sqrt{1-4LCR^2}} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}+\frac{L}{2\sqrt{1-4LCR^2}} & \frac{-RC}{\sqrt{1-4LCR^2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{L}{2\sqrt{1-4LCR^2}} & \frac{RC}{\sqrt{1-4LCR^2}} \\
0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{L}{2\sqrt{1-4LCR^2}} & \frac{-RC}{\sqrt{1-4LCR^2}} \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{matrix}\right]$$

$$B = \begin{bmatrix}
-\frac{V_S}{2L}+\frac{V_S}{2\sqrt{1-4LCR^2}} \\
\frac{V_S}{2L}+\frac{V_S}{2\sqrt{1-4LCR^2}} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
-V_S
\end{bmatrix}$$

スイッチでの電圧降下
バックコンバータの出力に与える影響

- 素子の電圧降下を考慮したリアクトル電圧
  - スイッチ・オン時
    - スイッチでの電圧降下V_Q

$$v_L = V_S - V_O - V_Q$$

  - スイッチ・オフ時
    - ダイオードでの電圧降下V_D

$$v_L = -V_O - V_D$$

  - 平均電圧0より $v_L = (V_S - V_O - V_Q)D + (-V_O - V_D)(1 - D) = 0$
  - 出力電圧

$$V_O = V_S D \boxed{- V_Q D - V_D (1 - D)}$$

  - 電圧降下を考慮しない場合 $V_O = V_S D$

減少分

Cの等価直列抵抗(ESR) を考慮した場合 バックコンバータのリプルに与える影響

ESLは高周波（ 300kHz以上）になると考慮する必要有

- ESRを求める
  - Cの電流は三角波（連続電流時，理想値）
    - ESR(r_c)に発生する電圧降下

$$\Delta V_{O,ESR} = \Delta i_C r_C$$

- ESRを考慮した場合の電圧変化
  - 理想的なCにおける電圧変化（リップルの式より）

$$\Delta V_{O,C} = \frac{V_O(1-D)}{8LCf^2}$$

  - ESRを考慮した電圧変化

$$\Delta V_O = \Delta V_{O,ESR} + \Delta V_{O,C} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_O < \Delta V_{O,ESR} + \Delta V_{O,C}$$

ESRで充電電圧が減少するため

Lの抵抗を考慮した場合
ブーストコンバータの出力に与える影響

- 理想的な入出力電圧の関係 $V_O = \frac{V_S}{1-D}$
  - 電源から供給される電力は出力電力と損失の和

$$P_S = P_O + P_{r_L} \Rightarrow V_S I_L = V_O I_D + I_L{}^2 r_L$$

r_L はLの抵抗

オフ時のダイオード電流平均値 $I_D = I_L(1-D) = \frac{V_O}{R}$ より

$$V_S = \frac{V_O r_L}{R(1-D)} + V_O(1-D)$$

- 損失を考慮した時の入出力電圧の関係

$$V_O = \frac{V_S}{1-D}\frac{1}{1+\frac{r_L}{R(1-D)^2}}$$

こんな感じの絵

- 効率

$$\eta = \frac{P_O}{P_O + P_{loss}} = \frac{V_O{}^2/R}{V_O{}^2/R + I_L{}^2 r_L} = \frac{V_O{}^2/R}{V_O{}^2/R + \left(\frac{V_O/R}{1-D}\right)^2 r_L} = \frac{1}{1+\frac{r_L}{R(1-D)^2}}$$

不連続導通モード

Lに流れる電流が0となる

- バックコンバータの場合
  - L電圧・電流,電源電流　の絵
  - Lに印加される平均電圧

$$\left(V_S - V_O\right)DT - V_O D_1 T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_O}{V_S} = \frac{D}{D + D_1}$$

  - Lの平均電流

$$I_L = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2} I_{\max} DT + \frac{1}{2} I_{\max} D_1 T\right) = \frac{1}{2} I_{\max}\left(D + D_1\right)$$

    - 出力電流平均値と等しい

$$I_L = I_R = \frac{V_O}{R} = \frac{1}{2} I_{\max}\left(D + D_1\right)$$

不連続導通モード
バックコンバータ

- 不連続導通では，電流初期値は0
  - 電流最大値は，オン期間中の電流増分と同じ
    - オン時Lに印加される電圧 $v_L = V_S - V_O$
    - Lに流れる電流 $$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_S - V_O}{L} = \frac{\Delta i_L}{\Delta t} = \frac{\Delta i_L}{DT} = \frac{I_{\max}}{DT}$$
    - 電流最大値 $$I_{\max} = \Delta i_L = \frac{V_S - V_O}{L} DT = \frac{V_O D_1 T}{L}$$
- D1を求める $$\frac{V_O}{R} = \frac{1}{2} I_{\max}\left(D + D_1\right) = \frac{1}{2}\frac{V_O D_1 T}{L}\left(D + D_1\right)$$

$\Rightarrow$ $$D_1^{\,2} + DD_1 - \frac{2L}{RT} = 0$$

$\Rightarrow$ $$D_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 + \dfrac{8L}{RT}}}{2}$$

負号は不要

- 出力電圧は $$V_O = \frac{D}{D + D_1} V_S = \frac{2D}{-D + \sqrt{D^2 + \dfrac{8L}{RT}}} V_S$$

D_1=1-Dで連続導通

不連続導通モード
ブーストコンバータ

- 不連続導通時でも満たされる条件
  - Lの平均電圧は0 $V_S DT + (V_S - V_O) D_1 T = 0$ ⇨ $\dfrac{V_O}{V_S} = \dfrac{D + D_1}{D_1}$
  - ダイオードの平均電流は負荷の平均電流と等しい

$$I_D = \frac{V_O}{R} = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2} I_{\max} D_1 T\right) = \frac{1}{2} I_{\max} D_1$$

  - 電流最大値は，オン期間中の電流増分と同じ

$$I_{\max} = \Delta i_L = \frac{V_S}{L} DT$$

  - D1を求める $I_D = \dfrac{V_O}{R} = \dfrac{1}{2}\dfrac{V_S}{L} DTD_1$ ⇨ $D_1 = \dfrac{V_O}{V_S}\dfrac{2L}{RDT}$
  - 出力電圧は $\dfrac{V_O}{V_S} = \dfrac{D}{\dfrac{V_O}{V_S}\dfrac{2L}{RDT}} + 1$ ⇨ $\dfrac{V_O}{V_S} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2RD^2T}{L}}\right)$

状態空間平均化法
(State-space averaging)

- システム(回路)の２つの状態方程式が一つにならないか？
  - スイッチ･オンの状態
  - スイッチ･オフの状態
- 各状態の期間に対して状態方程式の平均を求めて使用
- システムの状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ u_0 = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{cases}$$

状態空間平均化法

- 各状態方程式
  - オン時
    - 期間dT

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_1}\mathbf{x} + \mathbf{B_1}\mathbf{u} \\ u_0 = \mathbf{C_1}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \end{cases}$$

  - オフ時
    - 期間(1-d)T

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_2}\mathbf{x} + \mathbf{B_2}\mathbf{u} \\ u_0 = \mathbf{C_2}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \end{cases}$$

- 各期間で重みをつけた平均

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{A_1}d + \mathbf{A_2}(1-d)\right]\mathbf{x} + \left[\mathbf{B_1}d + \mathbf{B_2}(1-d)\right]\mathbf{u} \\ u_0 = \left[\mathbf{C_1}^{\mathbf{T}}d + \mathbf{C_2}^{\mathbf{T}}(1-d)\right]\mathbf{x} \end{cases}$$

状態空間平均化法

- システムの状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ u_0 = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \end{cases}$$

- 平均化した状態空間

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_1}d + \mathbf{A_2}(1-d)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1}d + \mathbf{B_2}(1-d)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C_2}^{\mathbf{T}}d + \mathbf{C_2}^{\mathbf{T}}(1-d)$$

状態空間平均化法
小信号解析

- 定常状態における動作点付近の微小擾乱
  - 定常状態（動作点）

$$\mathbf{X}, D, \mathbf{U}$$

  - 微小擾乱

$$\tilde{\mathbf{x}}, d, \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{x}}$$

$$d = D + \tilde{d}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}}$$

- 定常状態において　$\dot{\mathbf{X}} = 0$

$$\mathbf{AX} + \mathbf{BU} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}$$

$$U_0 = -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} + \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}$$

状態空間平均化法

小信号解析

- 微小擾乱を含む変数の重み付状態方程式

$$\dot{\mathrm{X}}+\dot{\tilde{\mathrm{x}}}=\left[\mathrm{A}_1\left(D+\tilde{d}\right)+\mathrm{A}_2\left(1-D-\tilde{d}\right)\right]\left[\mathrm{X}+\tilde{\mathrm{x}}\right]$$
$$+\left[\mathrm{B}_1\left(D+\tilde{d}\right)+\mathrm{B}_2\left(1-D-\tilde{d}\right)\right]\left[\mathrm{U}+\tilde{\mathrm{u}}\right]$$

– 高次の項を無視

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}=\left[\mathbf{A_1}D+\mathbf{A_2}\left(1-D\right)\right]\tilde{\mathbf{x}}+\left[\mathbf{B_1}D+\mathbf{B_2}\left(1-D\right)\right]\tilde{\mathbf{u}}$$
$$+\left[\left(\mathbf{A_1}-\mathbf{A_2}\right)\mathbf{X}+\left(\mathbf{B_1}-\mathbf{B_2}\right)\mathbf{U}\right]\tilde{d}$$

- 同様に

$$\tilde{u}_0=\left[\mathbf{C_1}^{\mathbf{T}}D+\mathbf{C_2}^{\mathbf{T}}\left(1-D\right)\right]\tilde{\mathbf{x}}+\left[\left(\mathbf{C_1}^{\mathbf{T}}-\mathbf{C_2}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{X}\right]\tilde{d}$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 状態空間平均化法でコンバータの伝達関数を作る
  - スイッチオン･オフ時の回路図
- オン状態
  - KVLから $V_S = L\dfrac{di_L}{dt} + i_R R$
  - 負荷接続部
    - KVL $L\dfrac{di_L}{dt} + i_C r_C + v_C = V_S$
    - KCL $i_R = i_L - i_C = i_L - C\dfrac{dv_C}{dt}$

状態空間平均化法

バックコンバータの解析(オン)

- フィルタコンデンサ

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{r_C}\left(V_S - L\frac{di_L}{dt} - v_C\right)$$

- i_Lの式にする
  - i_Rを消す

$$V_S = L\frac{di_L}{dt} + \left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right)R$$

$$= L\frac{di_L}{dt} + \left[i_L - \frac{1}{r_C}\left(V_S - L\frac{di_L}{dt} - v_C\right)\right]R$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{Rr_C}{L(R+r_C)}i_L - \frac{R}{L(R+r_C)}v_C + \frac{1}{L}V_S$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析(オン)

- もうひとつのKVL

$$v_C + i_C r_C - i_R R = 0$$

- v_Cの式にする
  - $-i_R$を消す

$$v_C + i_C r_C - \left(i_L - C\frac{dv_C}{dt} \right) R = 0$$

  - $-i_C$を消す

$$v_C + C\frac{dv_C}{dt} r_C - \left(i_L - C\frac{dv_C}{dt} \right) R = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{R}{C\left(R + r_C\right)} i_L - \frac{1}{C\left(R + r_C\right)} v_C$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析(オン)

- 行列であらわす

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_1}\mathbf{x} + \mathbf{B_1}\mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = V_S \qquad \mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{Rr_C}{L(R+r_C)} & -\dfrac{R}{L(R+r_C)} \\ \dfrac{R}{C(R+r_C)} & -\dfrac{1}{C(R+r_C)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\dfrac{r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{bmatrix}$$

$$r_C << R$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析(オフ)

- 状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \ \mathbf{u} = V_S$$

  – 入力電圧がない $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  – 負荷回路はおなじ $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1$

状態空間平均化法

バックコンバータの解析(オン･オフ)

- デューティであらわす重みを考える

$$\dot{\mathbf{x}}d = \mathbf{A_1}\mathbf{x}d + \mathbf{B_1}\mathbf{u}d$$

$$\dot{\mathbf{x}}(1-d) = \mathbf{A_2}\mathbf{x}(1-d) + \mathbf{B_2}\mathbf{u}(1-d)$$

$$= \mathbf{A_1}\mathbf{x}(1-d) + \mathbf{B_2}\mathbf{u}(1-d)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_1}\mathbf{x} + \left[\mathbf{B_1}d + \mathbf{B_2}(1-d)\right]\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_1} = \mathbf{A_2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1}d$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{d}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_S$$

状態空間平均化によるバックコンバータ及び負荷と出力フィルタの表現

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 入出力間の伝達関数を求める
  - 出力電圧

$$v_O = Ri_R = R(i_L - i_R) = R\left(i_L - \frac{v_O - v_C}{r_C}\right)$$

$$v_O = \frac{Rr_C}{R + r_C} i_L + \frac{R}{R + r_C} v_C \approx r_C i_L + v_C$$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \mathbf{C_1}^{\mathbf{T}} = \mathbf{C_2}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{Rr_C}{R + r_C} & \frac{R}{R + r_C} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_O = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 小信号解析(微小擾乱に対する状態方程式)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \left[\mathbf{A_1}D + \mathbf{A_2}(1-D)\right]\tilde{\mathbf{x}} + \left[\mathbf{B_1}D + \mathbf{B_2}(1-D)\right]\tilde{\mathbf{u}}$$

$$+\left[(\mathbf{A_1} - \mathbf{A_2})\mathbf{X} + (\mathbf{B_1} - \mathbf{B_2})\mathbf{U}\right]\tilde{d}$$

$$= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B_1}D\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A_1} = \mathbf{A_2} \;\; \mathbf{B_2}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

さっき入力Uは一定の仮定を用いたので

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 伝達関数
  - ラプラス変換

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s)+\mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\tilde{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

U一定の仮定はおいといて

$$\tilde{v}_O(s)=\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{C}^{\mathbf{T}}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$\frac{\tilde{v}_O(s)}{\tilde{d}(s)}=\mathbf{C}^{\mathbf{T}}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B_1}\mathbf{U}$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 伝達関数

$$\frac{\tilde{v}_O(s)}{\tilde{d}(s)} = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B_1}\mathbf{U}$$

$$= \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{r_C}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_s$$

$$= \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s+\frac{r_C}{L}\right)+\frac{1}{L}\frac{1}{C}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{r_C}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V$$

$$= \frac{d}{L} \frac{V_s}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s+\frac{r_C}{L}\right)+\frac{1}{L}\frac{1}{C}} \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 伝達関数

$$\frac{\tilde{v}_O(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{dV_s}{L}\frac{r_C\left(s+\frac{1}{RC}\right)+\frac{1}{C}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s+\frac{r_C}{L}\right)+\frac{1}{L}\frac{1}{C}}$$

$$= \frac{dV_s}{L}\frac{r_C\left(s+\frac{1}{RC}\right)+\frac{1}{C}}{s^2+s\left(\frac{1}{RC}+\frac{r_C}{L}\right)+\frac{1}{RC}\frac{r_C}{L}+\frac{1}{L}\frac{1}{C}}$$

$$= \frac{dV_s}{L}\frac{r_Cs+\frac{r_C}{RC}+\frac{1}{C}}{s^2+s\left(\frac{1}{RC}+\frac{r_C}{L}\right)+\frac{r_C}{RCL}+\frac{1}{L}\frac{1}{C}}$$

$$= \frac{dV_s}{LC}\frac{r_CCs+\frac{r_C}{R}+1}{s^2+s\left(\frac{1}{RC}+\frac{r_C}{L}\right)+\frac{r_C}{RCL}+\frac{1}{L}\frac{1}{C}}$$

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 伝達関数

$$\frac{\tilde{v}_O(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{dV_s}{LC}\frac{r_C Cs + \frac{r_C}{R} + 1}{s^2 + s\left(\frac{1}{RC} + \frac{r_C}{L}\right) + \frac{r_C}{RCL} + \frac{1}{L}\frac{1}{C}}$$

$$\approx \frac{dV_s}{LC}\frac{r_C Cs + 1}{s^2 + s\left(\frac{1}{RC} + \frac{r_C}{L}\right) + \frac{1}{L}\frac{1}{C}} \qquad \frac{r_C}{R} << 1$$

- バックコンバータの制御系設計に使っている

状態空間平均化法
バックコンバータの解析

- 伝達関数

U一定でなかったら

  - ラプラス変換

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B_1}D\tilde{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$\tilde{v}_O(s) = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}}(s)$$

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B_1}D\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$= \left[\mathbf{A} + \mathbf{B_1}D\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\right]\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B_1}D\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\right]\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B_1}\mathbf{U}\tilde{d}(s)$$

$$\frac{\tilde{v}_O(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}}(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{B_1}\mathbf{U}}{s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B_1}D\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}$$