

エネルギー管理研修
電気の基礎
1. 電気及び電子理論

京都大学 大学院 舟木 剛
平成16年12月13日

1.1 電磁気

- 電磁界はMaxwellの方程式で記述される

$$\begin{cases} rot \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ rot \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (rot \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X})$$

\mathbf{H} :磁界 \mathbf{J} :電流密度 \mathbf{D} :電束密度 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$:変位電流

\mathbf{E} :電界 \mathbf{B} :磁束密度

- クーロンの法則, アンペアの法則はMaxwellの方程式より導出される

1.1.1 静電界

- 電荷
 - 物質や原子・電子などが帶びている電気やその量を指す
 - 単位はクーロン C
 - 物体が電荷を持った状態を帶電という
 - 電気には正負がある。電荷にも正電荷・負電荷がある
- 電荷の保存性
 - 閉じた系において、電荷全体の合計は一定。すなわち保存性がある(発生・消滅しない)

1.1.1 静電界

- クーロンの法則
 - 電荷を持った帯電体の近くに他の帯電体を置くと, 両者には反発力or吸引力が働く(クーロン力)
 - 2つの帯電体の間に働く力は, 電荷量の積に比例し, 距離 r の二乗に反比例する
 - 2つの電荷を Q_1, Q_2 , 両者の距離を r とすると, 両者に作用する力 F は

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad [N] \quad \varepsilon_0 : \text{真空の誘電率} [F/m]$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \varepsilon_r : \text{比誘電率}$$

1.1.1 静電界

- クーロンの法則

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon_0 \epsilon_r 4\pi r^2} \quad [N]$$

- 半径 r の球の中心に電荷 Q_1 を置くと, Q_1 から発生する力(電束は)は全方位に広がる。
- 球の表面積は $4\pi r^2$ より, 球面上での電束密度は $4\pi r^2$ に反比例する。
- 球面上に置いた電荷 Q_2 に作用する力は, 球面上の電束密度に比例する。

1.1.1 静電界

- 電界

- 電荷を持った帯電体の力が作用する場

- 電荷(帯電体)が静止している場合は静電界

$$E = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Q}$$

E : 電界の強さ [F/m]
 ΔQ : 電界内に持ってきた電荷
 ΔF : ΔQ に対して働く力

- 極限をとっているのは、厳密には持ってきた電荷によって電荷分布が変動するため

- 力の方向がベクトルであるため、電界もベクトルとなる

- 電界中の一点に、最初の電荷分布を乱さない電荷 Q を与えたとき、これに作用する力 F は

$$F = QE \quad [N]$$

1.1.1 静電界

- 電位差

- 電界中において、点Aから点Bまで単位電荷を運ぶのに必要とする仕事

- 電界E中で、電荷qに働く力 $F = qE$
 - この力に逆らって、電荷qを Δs 動かすのに必要な仕事

$$\Delta W = -F\Delta s = -qE\Delta s$$

- 微小変位を点Aから点Bで表す $W = -\int_A^B qEds$

- $q=1$ (単位電荷)として $V_{BA} = -\int_A^B Eds$
 - V_{BA} 点Bと点Aの電位差

- 点A, 点Bが定まれば、途中の経路に関わらず一定
» 電界内的一点O、二点A, Bを考える。

$$V_{BA} = -\int_A^B Eds = -\left(\int_A^O Eds + \int_O^B Eds \right) = V_{BO} - V_{AO}$$

1.1.1 静電界

- 電位
 - 無限遠点との電位差
 - 無限遠点を電界Oにとり, 基準とする。
 - 点電荷Qより距離rの点の電位V_r
 - 電界内に電位の基準を一点とり(無限遠点∞), 各点の基準点に対する電位Vは
 - 点Oにある電荷Qの生じる電界内で, 微小電荷を点A(r₁)からB(r₂)まで運ぶのに要する仕事

$$V = \int_{r=r_1}^{r=r_2} -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

1.1.1 静電界

- 電位
 - 点電荷Qより距離rの点の電位V_r
 - $q=1, r_1=\infty, r_2=r$ とすると

$$V = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

1.1.1 静電界

- ガウスの定理

- 電界内に任意の閉曲面Sをとり, n をその面上の一点の外向き法線方向の単位長ベクトルとすると, 球面全体を通る電束は

$$\int_S E \cdot n ds = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q$$

- 但し, 左辺の面積分は閉曲面全体の積分。 $\sum Q$ は, この閉曲面に囲まれた電荷の和。
 - 証明
 - 電界の中の一つの電荷 ΔQ を考える。
 - 曲面Sの微小面積 ΔS をとり, ΔQ によるこの点の電界の大きさを ΔE とすると

$$\Delta E = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

1.1.1 静電界

– 証明つづき

- 微小面積 ΔS に対する E の垂直成分を E_n で表せる

$$(\Delta E \cdot n) \Delta S = \Delta E \cos \theta \Delta S$$

- ΔS を底面として、 ΔQ を頂角とする円錐を ΔQ を中心とする半径 r の球が切り取る部分を $\Delta S'$ とすると

$$\Delta S' = \Delta S \cos \theta$$

- 従って

$$(\Delta E \cdot n) \Delta S = \frac{\Delta Q \Delta S'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- $\Delta S'/r^2$ は円錐を囲む立体角に等しく、 $\Delta \omega$ として

$$(\Delta E \cdot n) \Delta S = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \Delta \omega$$

1.1.1 静電界

– 証明つづき

- すなわち ΔS が積分に寄与する分は、距離 r に無関係で、立体角のみに関係する
- 左辺を S 面全体について積分すると、 $\Delta \omega$ の和、すなわち ΔQ からみた全立体角となる。

$$\int_S \Delta E \cdot n ds = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}$$

- ΔQ が面 S の外にあるとき
 - 同一の立体角の部分が $\Delta S_1, \Delta S_2$ をとる
 - $\Delta S_1, \Delta S_2$ では法線の方向は逆なので、面全体では

$$\int_S \Delta E \cdot n ds = 0$$

1.1.1 静電界

– ガウスの定理の物理的な意味

$$\int_S E \cdot n ds = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q$$

- E_n は垂直方向の単位面積当たりの電気力線数。すなわち面を通り抜ける電気力線の面積密度
- 左辺の積分は、面Sを出て行く電気力線の総数
- 右辺の $\sum Q$ は面内の全電荷

$$\text{面 } S \text{ を出て行く電気力線数} = \frac{1}{\epsilon_0} (\text{面 } S \text{ 内の全電荷})$$

– 面内にある単位電荷ごとに $1/\epsilon_0$ 本の電気力線が出て行く

1.1.1 静電界

- 静電容量
 - 2つの導体間の静電容量の定義
 - 二個の導体があり一方に Q , 他方に $-Q$ の電荷を与えたとき, 二導体間の電位差が V である場合に, 二導体間の静電容量は次式で表される。

$$C = \frac{Q}{V}$$

- n 個の導体を考える。
- 導体 m だけに単位電荷を与え, 他の導体の電荷が0であるとき, 各導体の電位

$$P_{1m}, P_{2m}, P_{3m}, \dots$$

- 導体 m に電荷 Q_m を与え, 他の導体が零電荷のとき, 各導体の電位

$$P_{1m}Q_m, P_{2m}Q_m, P_{3m}Q_m, \dots$$

1.1.1 静電界

- 静電容量

- 導体が各々電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_n を持つとき, 各導体の電位は重ねの理により

$$\begin{cases} V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 + \cdots P_{1n}Q_n \\ V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 + \cdots P_{2n}Q_n \\ \vdots \\ V_n = P_{n1}Q_1 + P_{n2}Q_2 + P_{n3}Q_3 + \cdots P_{nn}Q_n \end{cases}$$

- C に蓄えられるエネルギー

- 最初に電荷を与える時は, 導体の電位は低く, 単位電荷あたりに要する仕事は小さいが, 導体が充電されるに従って, 電位は V に近づく。だから蓄えられているエネルギーは QV にはならない。

1.1.1 静電界

– Cに蓄えられるエネルギー

- n 個の導体を考える。最初、各導体の電位は全て0とする。
- 導体1に微小電荷 ΔQ ずつ運び、これで Q_1 まで充電する。
- 途中、電位が V の時に ΔQ を運ぶのに要する仕事は $V\Delta Q$
- 全体の所要エネルギー
$$W_1 = \sum V\Delta Q$$

- 他の導体の電荷は0だから、電位 V 時の電荷を Q とすると $V = P_{11}Q$

- 従って導体1に対して必要なエネルギーは
$$W_1 = \int_{Q=0}^{Q=Q_1} P_{11}QdQ = \frac{1}{2}P_{11}Q_1^2$$

- 同様に導体2に対して必要なエネルギー

$$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 \quad W_2 = \int_{Q=0}^{Q=Q_1} (P_{21}Q_1 + P_{22}Q)dQ = P_{21}Q_1Q_2 + \frac{1}{2}P_{22}Q_2^2$$

- 全体として

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i Q_i$$

- すなわち
$$W = \frac{1}{2} Q \times 2 \sum_{i=1}^2 \text{導体間の電位差} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

1.1.2 電流と磁界

- 静磁界と静電界の対応関係
 - 場の法則についての対応関係

磁界 電界

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} \iff rot\mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

- ## – 物理量の対応関係

H(磁界の大きさ) \Leftrightarrow E(電界の大きさ)

B(磁束密度) \Leftrightarrow **D**(電束密度 or 電氣變位)

- ## – 透磁率と誘電率の対応関係

$$\mu \iff \varepsilon$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

1.1.2 電流と磁界

- 静磁界と静電界の対応関係
 - 電気分極 P , 磁気分極を P_m とすると

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \Leftrightarrow \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- 分極した誘電体における電界

$$\rho' = \operatorname{div} \mathbf{P}$$

- 分極電荷は真空中に作る電界と等価
- 微小体積 Δv にある分極電荷 $\rho' \Delta v$ は, 距離 r の点に

放射状電界を作る

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\rho' \Delta v}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

- 磁化された磁性体において, 体積密度が次式で与えられる量がある

$$\rho_m = \operatorname{div} \mathbf{P}_m$$

1.1.2 電流と磁界

- 静磁界と静電界の対応関係
 - 微小体積 Δv にある $\rho_m \Delta v$ は、距離 r の点に放射状磁界を作る
 - 体積密度 ρ_m を持った量は、誘電体の分極電荷に対応。磁極と呼ぶ。
 - 磁極 Q_m が H_0 なる磁界に置かれたとき、働く力

$$\mathbf{F} = Q_m \mathbf{H}_0$$

- 磁極 Q_m の作る磁界の強さ

$$\mathbf{H} = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^2}$$

- 磁極 Q_{m1}, Q_{m2} の間に働く力

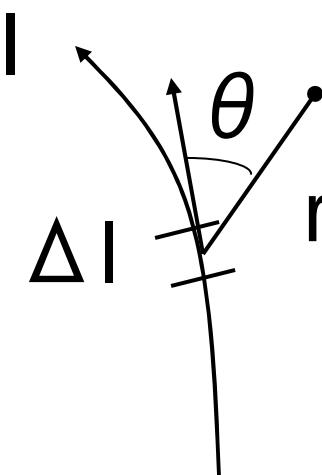
$$\mathbf{F} = \frac{Q_{m1} Q_{m2}}{4\pi\mu_0 r^2}$$

1.1.2 電流と磁界

- ビオ・サバルの法則
 - 電流の生成する磁束密度に対する法則
 - 真空中において、電流Iが流れる長さ Δl の部分が、r離れた点Pに生じる磁束密度 ΔB の大きさ

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \theta \Delta l$$

- 方向は、Pと Δl とを含む面に垂直
- 向きは右ねじの法則に従う



1.1.2 電流と磁界

- アンペアの周回積分の法則
 - 導体Cに電流Iが流れた場合点Pの磁束密度はB。微小変位dsに対するBdsを考えると
 - ビオ・サバールの法則より、真空中において電流Iの流れる△lの部分がr離れた点Pに生じる磁束密度は

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta l \times r}{r^3} \quad [T]$$

- 全電流の作る磁束は

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3}$$

$$B \cdot ds = \oint_{C'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3} \cdot ds = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\omega$$

$$\oint_C d\omega = -4\pi$$



$$\oint_C B \cdot ds = \mu_0 I$$

1.1.2 電流と磁界

- 磁気回路

- 磁界Hと磁束Bの関係 $B = \mu H$

- μ :透磁率。磁束密度と磁界の強さの関係を与える
 - 磁束の通路を電流の通路に見立てて扱う(磁気回路)

$$\text{磁束} \Leftrightarrow \text{電流}$$

$$\text{磁界の強さ} \Leftrightarrow \text{電界の強さ}$$

$$\text{電流と鎖交磁束の積 (起磁力)} \Leftrightarrow \text{起電力}$$

$$\text{透磁率} \Leftrightarrow \text{導電率}$$

- 一つの閉回路Cの起磁力F
$$F = \oint H \cdot ds$$

- AB間の磁気抵抗R
$$\int_A^B H \cdot ds = R\Phi$$

1.1.2 電流と磁界

- 電磁力

- 電流は電荷の移動であり, 磁界中を流れる電流に対して働く力

- 電荷 q の荷電体が, 導体の単位長あたり N 個あり, これが速度 v で動いているとき, 電流は

$$I = qNv$$

- 荷電体一個に働く力 F

- q :電荷, v :速度, B :磁束密度

$$F = qv \times B$$

- 電流 I が流れる導体の単位長に働く力 F_0

$$F_0 = qNv \times B = I \times B = IB \sin \theta$$

1.1.3 電磁誘導

- ファラデーの法則
 - 一つの回路に電磁誘導によって生じる起電力は、この回路に鎖交する磁束数の減少する割合に比例する
 - レンツの法則
 - 電磁誘導によって生じる起電力は、磁束変化を妨げる向きの電流を流す向きに発生する
 - ノイマン則
 - 鎖交磁束数の減少の割合に等しい起電力を生じる
- $$u = -\frac{d\Phi}{dt} \quad [V]$$
- Φ [Wb]:鎖交する全磁束

1.1.3 電磁誘導

- 自己インダクタンスと相互インダクタンス

$$\begin{aligned} \text{磁気エネルギー} W &= \frac{1}{2} \sum \text{磁束} \times \text{磁束と鎖交する電流} \\ &= \frac{1}{2} \sum \text{電流} \times \text{電流と鎖交する電流} \\ &= \frac{1}{2} (\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2 + \Phi_3 I_3 + \dots) \end{aligned}$$

– I_1, I_2, I_3, \dots 各々の作る磁束のうち, I_1 と鎖交する
磁束数を $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{13}, \dots$ とすると

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13} + \dots$$

– $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{13}, \dots$ は各々それを作り電流に比例

$$\Phi_{11} = L_1 I_1 \quad \Phi_{12} = M_{12} I_2 \quad \Phi_{13} = M_{13} I_3$$

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 + \dots$$

1.1.3 電磁誘導

- 自己インダクタンスと相互インダクタンス
 - L:自己インダクタンス
 - 磁束を作る回路自身に鎖交する磁束に対するもの
 - M:相互インダクタンス
 - 磁束を作る回路と鎖交する磁束が別の回路

$$\Phi_{11} = L_1 I_1$$

- M:相互インダクタンス
 - 磁束を作る回路と鎖交する磁束が別の回路

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2 \quad \Phi_{13} = M_{13} I_3$$

- 飽和のような現象がなければ

$$M_{12} = M_{13} = M_{14} \cdots$$

1.1.3 電磁誘導

- コイルに蓄えられるエネルギー
 - 自己インダクタンス H のコイルの電流を 0 から IA に増加させることを考える。
 - L の電流を増加させると、 L の端子に逆起電力が発生する

$$V = L \frac{di}{dt} \quad [V]$$

- 逆起電力に打ち勝って、電流を増加させるのに必要な電力

$$P = VI \quad [W]$$

- 電流が 0 から IA に達するまでに必要なエネルギー

$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t L \frac{di}{dt} idt = \int_0^t L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad [J]$$

1.2 電気回路

- オームの法則
 - R :抵抗, V :起電力, I :電流

$$V = IR$$

- ジュール熱
 - 抵抗での消費電力

$$W = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

- 消費電力量=消費電力を時間積分したもの

$$Q = RI^2 t [J] = \frac{RI^2 t}{4.185} [Cal]$$

1.2 電気回路

1.2.1 直流回路

- キルヒ霍フの法則

- KCL(電流則)

- 任意の節点に流入する電流の合計は0

- KVL(電圧則)

- 任意の閉路について、各部の電圧を合計すると0

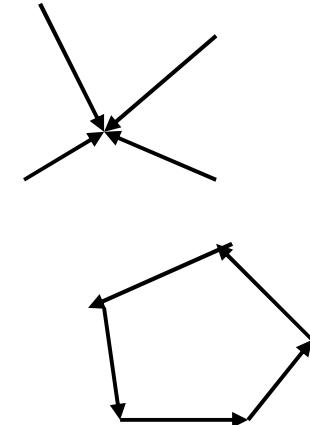
- テブナン・ノートンの等価回路

- テブナンの定理

- 電圧源、電流源と抵抗からなる回路は、抵抗と電圧源の直列等価回路であらわすことができる。

- ノートンの定理

- 電圧源、電流源と抵抗からなる回路は、抵抗と電流源の並列等価回路であらわすことができる。



1.2 電気回路

1.2.2 交流回路

- 交流電圧

- 瞬時値

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

- E_m :振幅, ω :角周波数, θ :位相(遅れ負, 進み正)

- 平均値

$$E_{ave} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_m \sin \varphi d\varphi = 0$$

- 絶対値の平均

$$E_{absave} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E_m \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} E_m \approx 0.636 E_m$$

- 二乗平均(実効値)

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_m^2 \sin^2 \varphi d\varphi} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 E_m$$

1.2 電気回路

1.2.2 交流回路

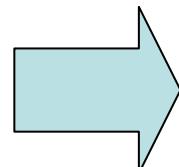
- インピーダンス

- 周波数fの正弦波に対する、複素数で表したR,L,Cの抵抗値

$$R \Rightarrow Z_R = R$$

$$L \Rightarrow Z_L = j\omega L$$

$$C \Rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



複素インピーダンス

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

- 直列接続

$$Z = Z_1 + Z_2$$

- 並列接続

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

1.2 電気回路

1.2.2 交流回路

- インピーダンス

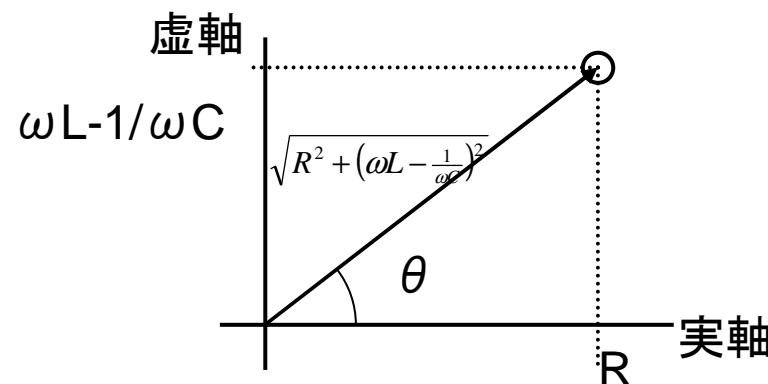
- 極座標表示

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\theta}$$

- 大きさ $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

- 角度

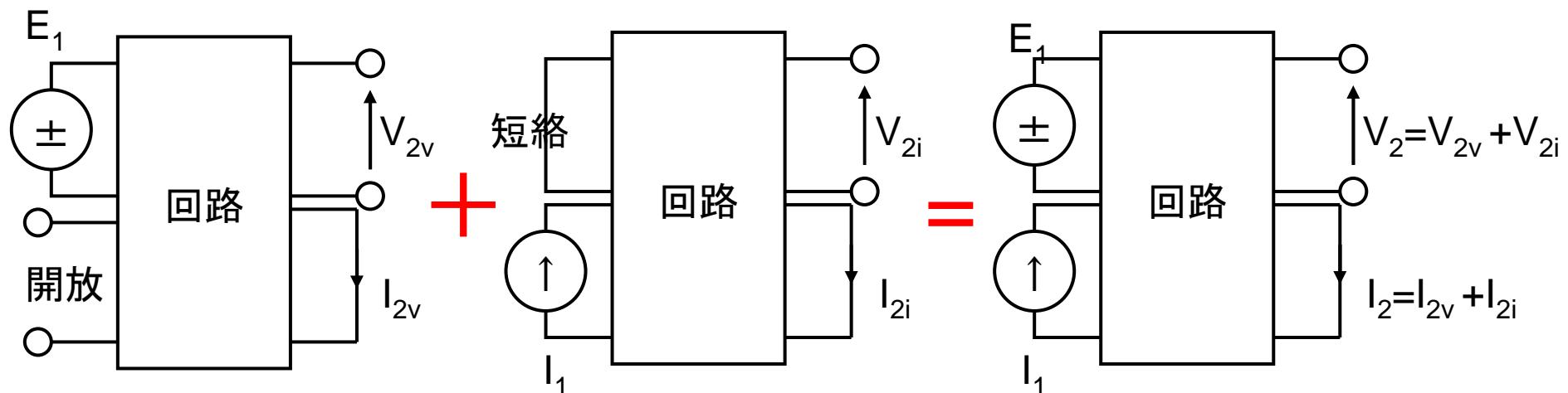
$$\tan \theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



1.2 電気回路

1.2.2 交流回路

- 重ね合わせの理
 - 電源とインピーダンスで構成される回路の状態は
 - 電流源を開放したときの電圧・電流
 - 電圧源を短絡したときの電圧・電流の和で表される



1.2 電気回路

1.2.2 交流回路

- 交流回路の電力

- 交流電圧, 電流

- 瞬時値 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta_e)$ $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$

- フェーザ $\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_e}$ $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_i}$

- 電圧を基準にすると, 電流は位相が $\theta_i - \theta_e$ 遅れる

- 平均電力

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} e(t)i(t)dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} E_m \sin(\omega t + \theta_e) I_m \sin(\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{E_m I_m}{2} \cos(\theta_i - \theta_e) \end{aligned}$$

1.2 電気回路

1.2.2 交流回路

- 交流回路の電力

- 複素電力

- フェーザで表した電圧・電流で求める
 - 遅れの無効電力を正とした場合の電力

$$\begin{aligned} P + jQ &= \dot{V}\dot{I} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_e} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_i} = \frac{E_m I_m}{2} e^{j(\theta_e - \theta_i)} \\ &= \frac{E_m I_m}{2} \cos(\theta_i - \theta_e) + j \frac{E_m I_m}{2} \sin(\theta_i - \theta_e) \end{aligned}$$

- P:有効電力は平均電力に等しい
 - Q:無効電力は交流特有の概念

1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- 対称三相交流(電圧)
 - 振幅が等しく、位相が120度ずつ異なる3つの正弦波(電圧)

$$e_a = \sqrt{2}E_m \sin \omega t \quad \Leftrightarrow \quad \dot{E}_a = \dot{E} \quad \text{A相基準}$$

$$e_b = \sqrt{2}E_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{E}_b = \dot{E}e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$e_c = \sqrt{2}E_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{E}_c = \dot{E}e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

但し、 $a = e^{j\frac{2}{3}\pi}$ とすると

$$1 + a + a^2 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1$$

1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- **Y結線**

- 各相の起電力の終端を, 共通の中性点Nに接続した三相交流の接続方法

- 対称な場合 $\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c = (1 + a + a^2) \dot{E} = 0$

- **△結線**

- 各起電力の終端を, 他の起電力の始端に接続した三相交流の接続方法

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} \dot{E} \quad \dot{E}_{bc} = a^2 \dot{E}_{ab} \quad \dot{E}_{ca} = a \dot{E}_{ab}$$

- 線間電圧は, 相電圧の $\sqrt{3}$ 倍。位相が $\pi/6$ 進む(Y-△変換)

1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- V結線

- △結線における電源の一つを外したもの
 - 変圧器の電圧・電流間には 30° の位相差が発生

- 変圧器の利用率 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 86.6\%$

- V結線時の許容出力は、変圧器容量をPとすると

$$2P \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}P \quad [\text{VA}] \quad \text{利用率悪い}$$

1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- 三相四線式

- 平衡負荷時

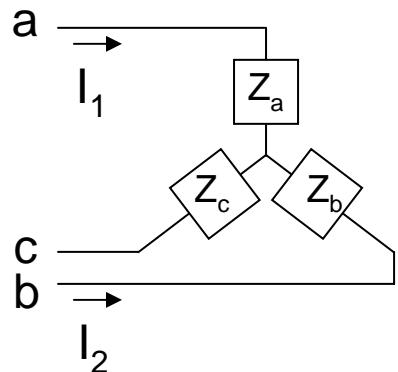
$$\begin{cases} \dot{I}_a = \dot{E}_a / \dot{Z} \\ \dot{I}_b = \dot{E}_b / \dot{Z} = a^2 \dot{I}_a \Rightarrow \dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0 \\ \dot{I}_c = \dot{E}_c / \dot{Z} = a \dot{I}_a \end{cases}$$

- 電源電圧が対称(平衡)で、負荷が三相平衡の時、中性線電流は流れない
- 電源・負荷共に三相平衡の場合、各相の電圧・電流は位相が $2/3\pi$ 異なるのみとなる。
 - 正相で現された単相等価回路で扱える。

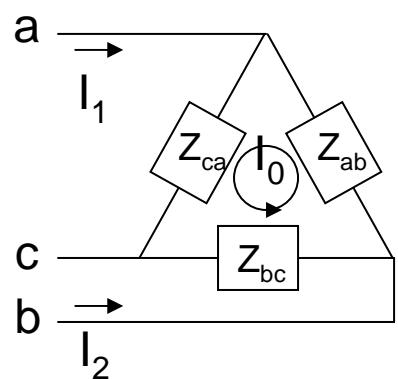
1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- 負荷の△Y変換



$$\begin{cases} \dot{V}_{ac} = \dot{I}_1 \dot{Z}_a + (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \dot{Z}_c \\ \dot{V}_{bc} = \dot{I}_1 \dot{Z}_b + (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \dot{Z}_c \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{V}_{ac} = (\dot{I}_0 + \dot{I}_1) \dot{Z}_{ca} \\ \dot{V}_{bc} = (\dot{I}_2 - \dot{I}_0) \dot{Z}_{bc} \\ \dot{V}_{ab} = -\dot{I}_0 \dot{Z}_{ab} \\ \dot{V}_{ab} + \dot{V}_{bc} + \dot{V}_{ca} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{V}_{ab}, \dot{V}_{bc}, \dot{V}_{ca}, \dot{I}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2$$

に関する連立方程式を解く

1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- 負荷の△Y変換

$$\dot{V}_{ab} + \dot{V}_{bc} + \dot{V}_{ca} = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{I}_0 = \frac{-\dot{I}_1 \dot{Z}_{ca} + \dot{I}_2 \dot{Z}_{bc}}{\dot{Z}_{ab} + \dot{Z}_{bc} + \dot{Z}_{ca}}$$

– 任意の I_1, I_2 に対して成立するためには

$$\dot{Z}_a = \frac{\dot{Z}_{ab} \dot{Z}_{ca}}{\dot{Z}_{ab} + \dot{Z}_{bc} + \dot{Z}_{ca}} \quad \dot{Z}_b = \frac{\dot{Z}_{ab} \dot{Z}_{bc}}{\dot{Z}_{ab} + \dot{Z}_{bc} + \dot{Z}_{ca}} \quad \dot{Z}_c = \frac{\dot{Z}_{bc} \dot{Z}_{ca}}{\dot{Z}_{ab} + \dot{Z}_{bc} + \dot{Z}_{ca}}$$

– 負荷のY△変換

$$\dot{Z}_{ab} = \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{Z}_c \dot{Z}_a}{\dot{Z}_c} \quad \dot{Z}_{bc} = \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{Z}_c \dot{Z}_a}{\dot{Z}_a} \quad \dot{Z}_{ca} = \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_b \dot{Z}_c + \dot{Z}_c \dot{Z}_a}{\dot{Z}_b}$$

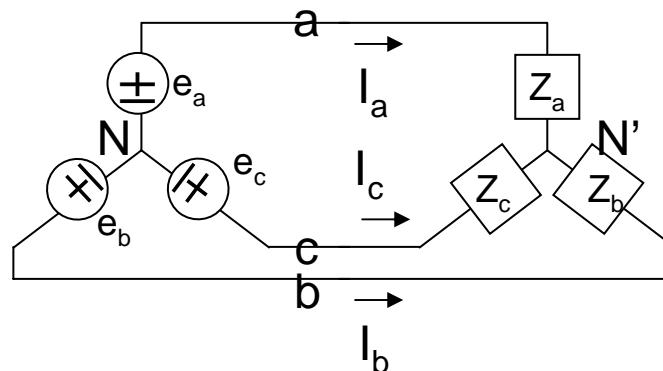
1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- ミルマンの定理
 - (全電圧の定理) 電圧源が並列接続された電気回路の出力電圧を求める定理
 - 電圧源 V_i , 回路のアドミタンス Y_i , 出力電圧 V_o とすると

$$V_o = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i V_i}{\sum_{i=1}^N Y_i}$$

- 三相三線式不平衡回路の解析



1.2 電気回路

1.2.3 三相交流回路

- ミルマンの定理による三相三線式不平衡回路の解析
 - 電源の中性点Nと、負荷の中性点N'の電位差 E_o に対して

$$\begin{cases} \dot{E}_a - \dot{E}_o = \dot{Z}_a \dot{I}_a \\ \dot{E}_b - \dot{E}_o = \dot{Z}_b \dot{I}_b \\ \dot{E}_c - \dot{E}_o = \dot{Z}_c \dot{I}_c \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{I}_a = \frac{\dot{E}_a - \dot{E}_o}{\dot{Z}_a} \\ \dot{I}_b = \frac{\dot{E}_b - \dot{E}_o}{\dot{Z}_b} \\ \dot{I}_c = \frac{\dot{E}_c - \dot{E}_o}{\dot{Z}_c} \end{cases}$$

- 三相三線式では中性線電流は流れないとめ

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{E}_o = \frac{\frac{\dot{E}_a}{\dot{Z}_a} + \frac{\dot{E}_b}{\dot{Z}_b} + \frac{\dot{E}_c}{\dot{Z}_c}}{\frac{1}{\dot{Z}_a} + \frac{1}{\dot{Z}_b} + \frac{1}{\dot{Z}_c}}$$

- E_o を代入して、 I_a, I_b, I_c を求めることができる

1.2 電気回路

1.2.4 過渡現象並びにひずみ波

- 直流回路の過渡解析

- RL直列回路

- 磁束の時間変化率が電圧に相当

$$\phi = Li \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \phi = V = \frac{d}{dt} Li = L \frac{d}{dt} i$$

- KVLより

$$E = Ri + L \frac{d}{dt} i$$

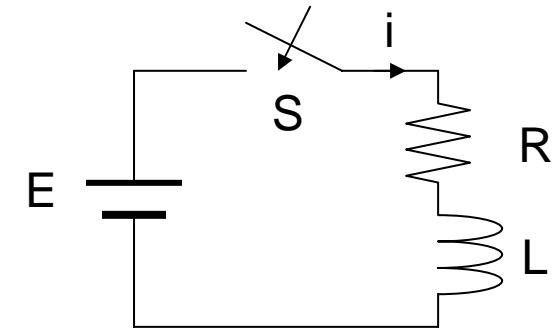
一般解

- 微分方程式の解

$$i = k e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

特解

- 微分演算子 $\frac{d}{dt}$ をラプラス変換(制御で説明)して解く方法もある

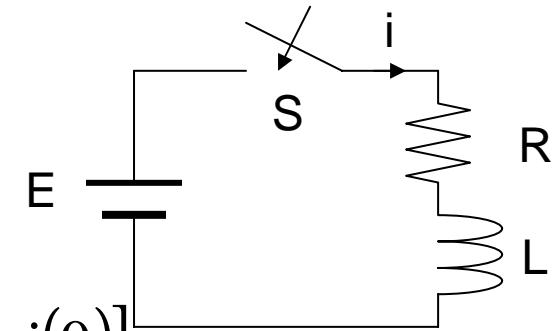


1.2 電気回路

1.2.4 過渡現象並びにひずみ波

- 直流回路の過渡解析
 - ラプラス変換での解き方

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{ラプラス変換}} \frac{E}{s} = RI + L[sI - i(0)]$$



$$RI + LsI = \frac{E}{s} - Li(0) \quad (R + Ls)I = \frac{E}{s} - Li(0)$$
$$I = \frac{1}{R + Ls} \left[\frac{E}{s} + Li(0) \right] = \frac{-\frac{LE}{R} + Li(0)}{R + Ls} + \frac{E}{sR} = \frac{-\frac{E}{R} + i(0)}{\frac{R}{L} + s} + \frac{E}{sR}$$

逆ラプラス変換

$$i(t) = \left[-\frac{E}{R} + i(0) \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

$$i(0) = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

1.2 電気回路

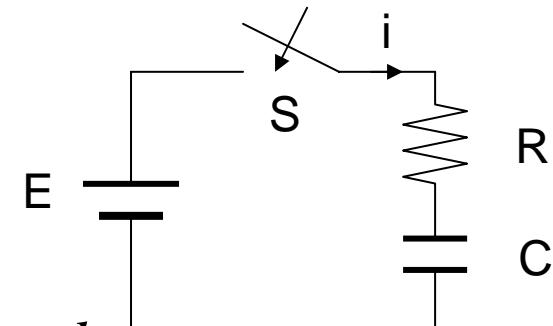
1.2.4 過渡現象並びにひずみ波

- 直流回路の過渡解析

- RC直列回路

- 電荷の時間変化率が電流に相当

$$Q = Cv \rightarrow \frac{d}{dt}Q = i = \frac{d}{dt}Cv = C \frac{d}{dt}v$$



- KVL

$$E = Ri + v = Ri + \frac{Q}{C}$$

一般解

- 微分方程式の解

$$Q = ke^{-\frac{1}{RC}t} + EC$$

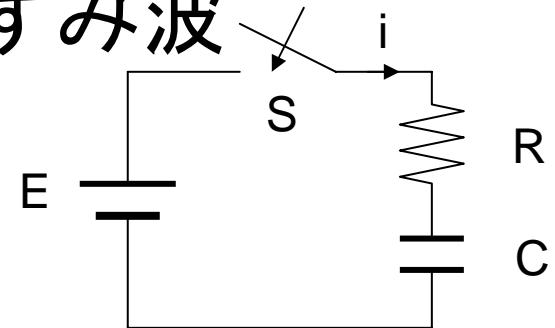
特解

- 微分演算子 $\frac{d}{dt}$ をラプラス変換(制御で説明)して解く方法もある

1.2 電気回路

1.2.4 過渡現象並びにひずみ波

- 直流回路の過渡解析
 - ラプラス変換での解き方



$$i = C \frac{d}{dt} v$$

ラプラス変換

$$E = R i + v$$

$$\left(R + \frac{1}{sC}\right)I = \frac{1}{s} [E - v(0)]$$

$$I = C[sV - v(0)] \quad V = \frac{1}{s} \left[\frac{I}{C} + v(0) \right]$$

$$\frac{E}{s} = RI + \frac{1}{s} \left[\frac{I}{C} + v(0) \right]$$

$$I = \frac{E - v(0)}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{CR}}$$

逆ラプラス変換

$$i(t) = \frac{E - v(0)}{R} e^{-\frac{1}{CR}t}$$

1.2 電気回路

1.2.4 過渡現象並びにひずみ波

- 過渡解析方法の応用
 - 発電機の動搖方程式の解き方
 - 電動機トルク T_m , 回転軸の慣性モーメント J , 角速度に比例する摩擦トルク k , 回転速度に無関係な負荷トルク T

$$T_m - T - k\omega = J \frac{d}{dt} \omega$$

- 一階の微分方程式として, 電気回路と同様に求解すればよい

1.2 電気回路

1.2.4 過渡現象並びにひずみ波

- 歪波形(交流・定常解)

- フーリエ級数展開→複数の周波数成分に分解

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$$

$$\left\{ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n \tau d\tau \quad n = 0, 1, 2, \dots \right.$$

$$\left. b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n \tau d\tau \quad n = 1, 2, \dots \right.$$

- 歪波交流実効値→周波数成分の二乗和平方根

$$E = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} E_n^2}$$

- 力率

$$\text{力率} = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}} = \frac{E_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n I_n \cos(\theta_{In} - \theta_{En})}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} E_n^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2}}$$

1.3 電子回路

1.3.1 半導体

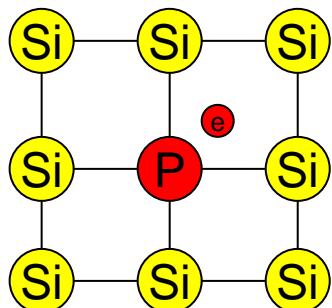
- 絶縁体
 - 電子が許容体を完全に占有し, それより上のエネルギー帯が空。外部から電界を印加しても電流は流れない
- 金属
 - 電子がエネルギー帯の一部だけ満たしている。電界を印加すると, 波数の状態が変わり電流が良く流れる
- 半導体
 - 絶対零度では絶縁体。温度が上がると充満帯(価電子帯)から上の空の伝導体に電子が励起され, 伝導体の電子と価電子帯の孔(正孔)が電流を運ぶ → 真性半導体
 - 不純物を導入して, 伝導電子や正孔を供給し, 電気伝導度を制御する → 不純物半導体

1.3 電子回路

1.3.1 半導体

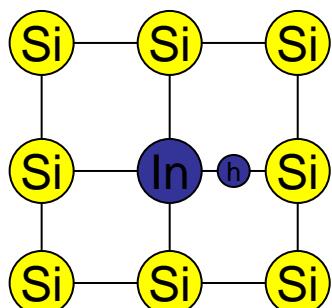
- 不純物半導体

- N型半導体



- » シリコン等の4族(元素の周期表の左から4番目)の真性半導体にアンチモン(Sb), リン(P)等の5族の不純物(ドナー)を加えて作る半導体.
 - » 結晶を構成するとき電子が余り, 自由電子となり電気伝導が行われる。

- P型半導体

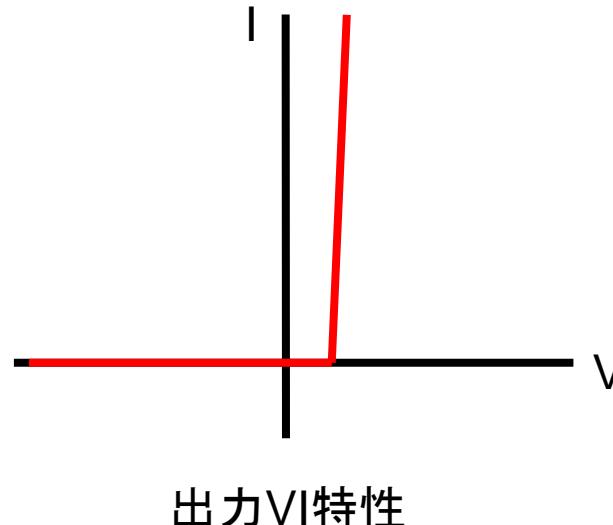
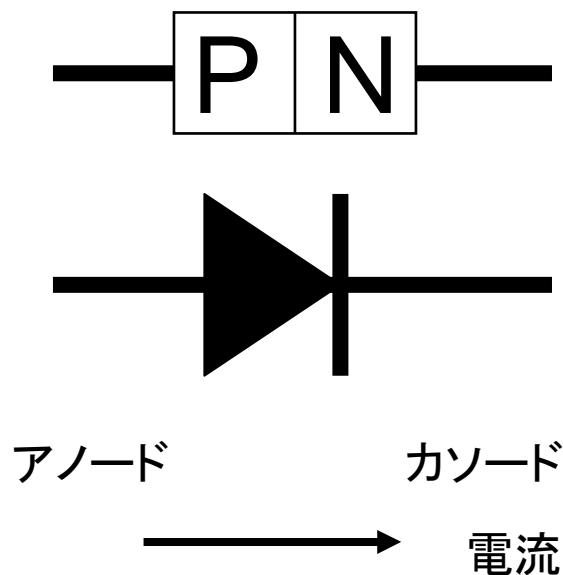


- » シリコン等の4族の真性半導体にホウ素(B), インジウム(In)等の3族の不純物(アクセプタ)を加えて作る半導体.
 - » 結晶を構成するとき電子が不足し, 正孔となり電気伝導が行われる。
 - » 自由電子や正孔をキャリアと呼ぶ

1.3 電子回路

1.3.1 半導体

- ダイオード
 - P形半導体とn形半導体を接合した2端子素子(PN接合ダイオード)
 - 点接触形, 接合形などがある
 - 高耐電圧用PiN, 高速用Schottky

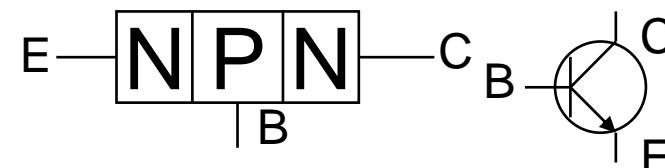
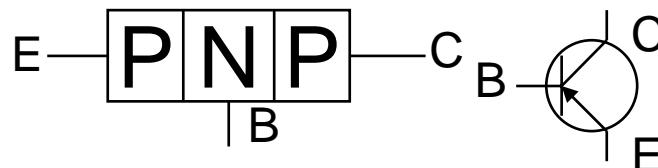


1.3 電子回路

1.3.1 半導体

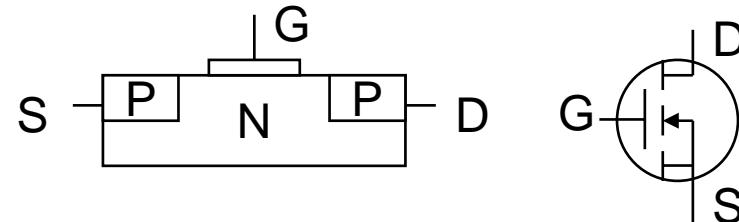
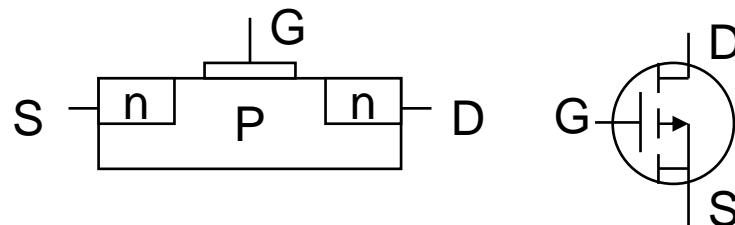
- トランジスタ

- 増幅作用を持つ半導体素子
- バイポーラ形とユニポーラ形(電界効果形)がある
 - バイポーラ形
 - P,N形半導体を組み合わせ, PNP,NPNを構成する



- ユニポーラ形

- NまたはP形の半導体でチャネルを作る。

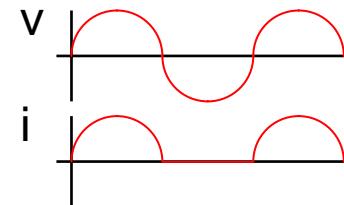
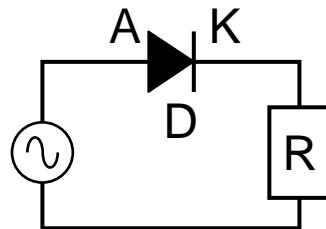


1.3 電子回路

1.3.2 整流回路

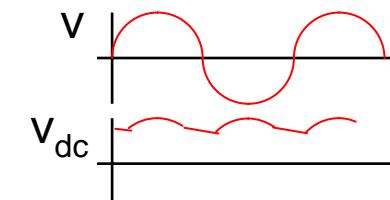
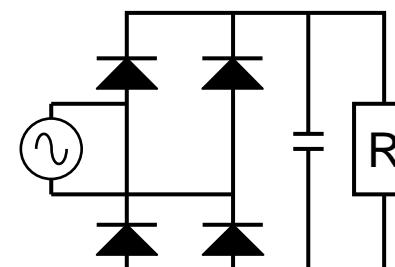
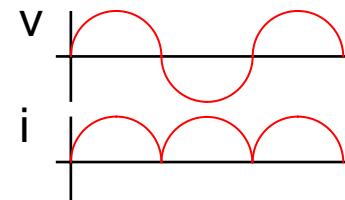
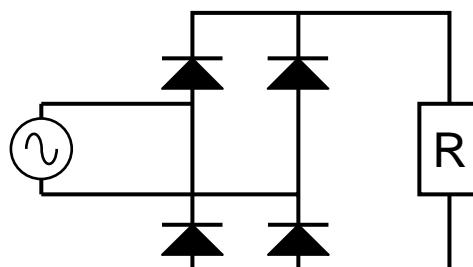
- **半波整流回路**

- 出力電流は正弦波の半分(半波)



- **全波整流回路**

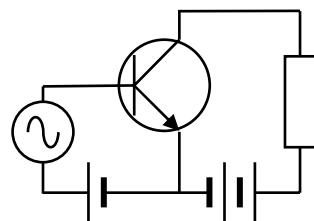
- 半周期毎に半波が反転した全波波形



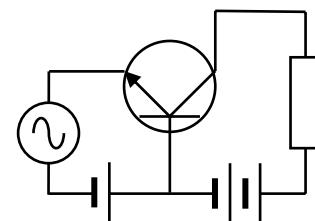
1.3 電子回路

1.3.3 増幅回路

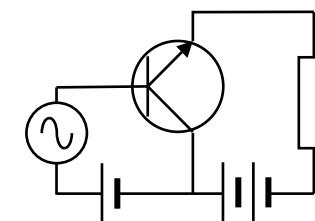
- トランジスタの入出力端子の共通接続(接地)点で三方式に分かれる



エミッタ接地



ベース接地



コレクタ接地

– エミッタ接地増幅率 β

- ベース電流の変化量に対するコレクタ電流の変化量

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

– ベース接地電流増幅率 α

- エミッタ電流の変化量に対するコレクタ電流の変化量

$$\alpha = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_E}$$

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_E - \Delta I_C} = \frac{\Delta I_C}{\frac{\Delta I_C}{\alpha} - \Delta I_C} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

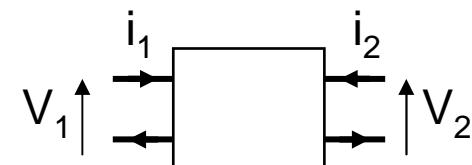
1.3 電子回路

1.3.3 増幅回路

- トランジスタの四端子定数(hパラメータ)
 - トランジスタを四端子(二端子対)回路で考える

- Y(アドミタンス)パラメータ

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



- Z(インピーダンス)パラメータ

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

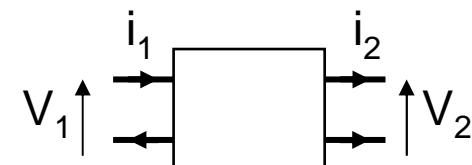
- H(ハイブリッド)パラメータ

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- G(ハイブリッド)パラメータ

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

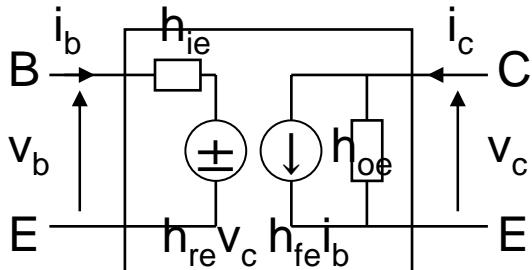
F行列→入出力電流の向きを変えたもの



1.3 電子回路

1.3.3 増幅回路

- トランジスタの四端子定数(h パラメータ)
 - トランジスタの四端子(二端子対)回路



- $h_i[\Omega]$: 出力端短絡入力インピーダンス
- h_r : 入力端開放電圧帰還比
- h_f : 出力端短絡電流増幅率
- $h_o[S]$: 入力端開放入力アドミタンス

第二添え字に、トランジスタの接地方式をつける
例: $h_{fe} \rightarrow$ エミッタ接地電流増幅率

$$\begin{bmatrix} V_{BE} \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B \\ V_{CE} \end{bmatrix}$$

$$h_{ie} = \frac{\Delta V_{BE}}{\Delta I_B} \quad h_{re} = \frac{\Delta V_{BE}}{\Delta V_{CE}}$$

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \beta \quad h_{oe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta V_{CE}}$$

1.3 電子回路

1.3.4 発振回路

- 增幅回路の出力の一部を正帰還して発振回路を構成する

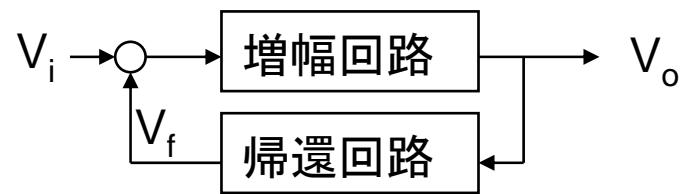
– 増幅回路の増幅率 $A = \frac{V_o}{V_i + V_f}$

– 帰還回路の増幅率 $\beta = \frac{V_f}{V_o}$

– 回路全体の増幅率 $A_o = \frac{V_o}{V_i}$

$$A = \frac{V_o}{V_i + V_f} = \frac{V_o}{V_i + \beta V_o} \quad \Rightarrow \quad A(V_i + \beta V_o) = V_o \quad \Rightarrow \quad A V_i = V_o(1 - A\beta)$$

$$\Rightarrow A_o = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 - A\beta}$$



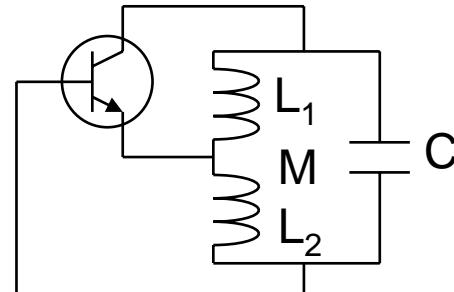
$A\beta = 1$ の時、分母が0となり、 $A_o = \infty$ となる。この条件下で一度発振し始めると持続する。

1.3 電子回路

1.3.4 発振回路

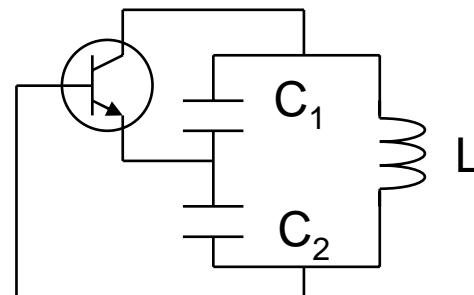
- ハートレー発振回路
 - コイルにセンタータップを設け、この端子を帰還に用いる
 - 発振周波数 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

但し $L = L_1 + L_2 - 2M$



- コルピツツ発振回路
 - コンデンサを分割し、帰還に用いる
 - 発振周波数 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

但し $C = C_1 + C_2$



1.3 電子回路

1.3.4 発振回路

- RC形発振回路

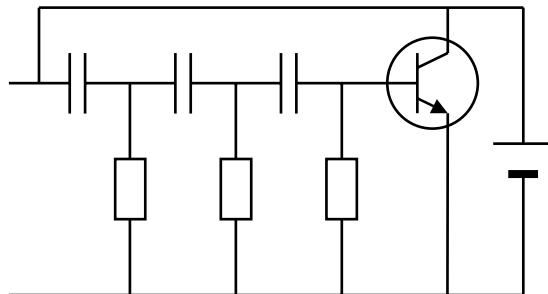
- 移相形発振回路は、一段毎に位相が 60° 変化(3段)
- 180° 移相する周波数で発振する
- 移相の段数で、発振周波数とトランジスタの必要利得が変化する

$$3\text{段} \quad f \equiv \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC}$$

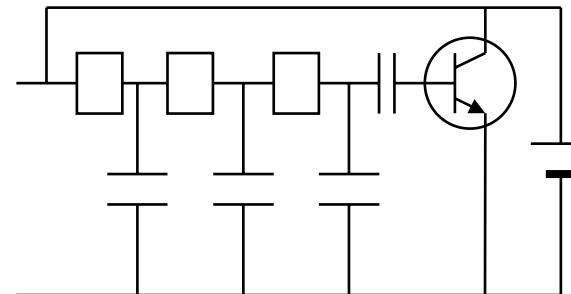
$$G \geq 29$$

$$4\text{段} \quad f \equiv \sqrt{\frac{10}{7}} \frac{1}{2\pi RC} \quad G \geq 19.4$$

- 微分形と積分形がある



微分形



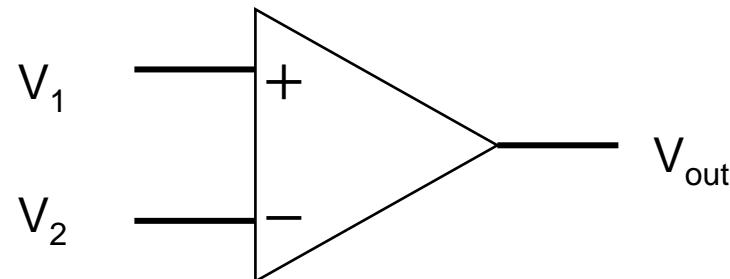
積分形

1.3 電子回路

1.3.5 演算増幅器(オペアンプ)

- オペアンプ

- 加算, 積分等の演算回路に用いる
- 同相入力端子(+)と, 逆相(反転)入力端子(-), 出力端子を持つ
- 理想的なオペアンプ
 - 入力インピーダンス ∞
 - 出力インピーダンス0
 - 増幅度 ∞



増幅度 α とすると

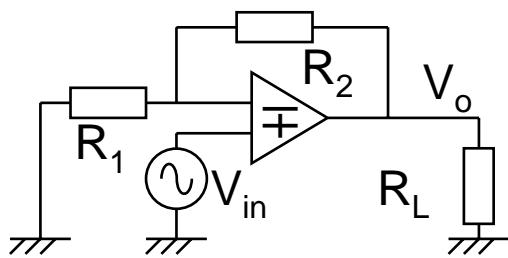
$$V_{out} = \alpha(V_2 - V_1)$$

1.3 電子回路

1.3.5 演算増幅器(オペアンプ)

- オペアンプ

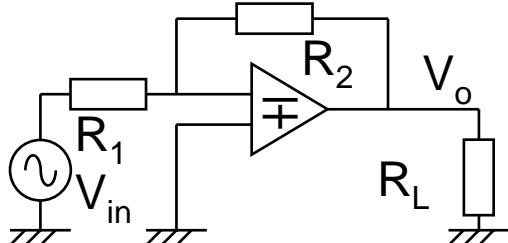
- 同相(非反転)増幅回路



$$\begin{cases} V_o = \alpha(V_{in} - V) & V_o = \alpha(V_{in} - V) = \alpha\left(V_{in} - \frac{R_1}{R_1+R_2}V_o\right) \\ V = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_o & V_o\left(1 + \frac{\alpha R_1}{R_1+R_2}\right) = \alpha V_{in} \\ A = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha R_1}{R_1+R_2}} = \frac{R_1+R_2}{R_1 + \frac{R_1+R_2}{\alpha}} & A = \frac{R_1+R_2}{R_1 + \frac{R_1+R_2}{\alpha}} \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} A = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{R_1+R_2}{R_1 + \frac{R_1+R_2}{\alpha}} = \frac{R_1+R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- 逆相(反転)増幅回路



$$\begin{cases} V_o = \alpha(-V) & V_o = -\alpha\left[V_{in} + \frac{R_1}{R_1+R_2}(V_o - V_{in})\right] \\ V = V_{in} + \frac{R_1}{R_1+R_2}(V_o - V_{in}) & V_o\left[1 + \frac{\alpha R_1}{R_1+R_2}\right] = -\alpha V_{in}\left[1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right] \\ A = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-\alpha\left[1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right]}{1 + \frac{\alpha R_1}{R_1+R_2}} = \frac{-\alpha[R_1+R_2-R_1]}{R_1+R_2+\alpha R_1} = \frac{-\alpha R_2}{R_1+R_2+\alpha R_1} = \frac{-R_2}{\frac{R_1+R_2}{\alpha}+R_1} & A = \frac{-R_2}{\frac{R_1+R_2}{\alpha}+R_1} \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} A = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{-R_2}{\frac{R_1+R_2}{\alpha}+R_1} = -\frac{R_2}{R_1}$$