制御工学I　第10回
周波数特性
ナイキスト線図
ニコルス線図
過渡特性

平成21年6月22日

ナイキスト線図6

- 一般化した伝達関数のナイキスト線図
  - 分子の次数が分母より低い(n>m)

$$G(s)=\frac{K(1+sT_{b1})(1+sT_{b2})\cdots(1+sT_{bn-\lambda})}{s^{\lambda}(1+sT_{a1})(1+sT_{a2})\cdots(1+sT_{an-\lambda})}$$

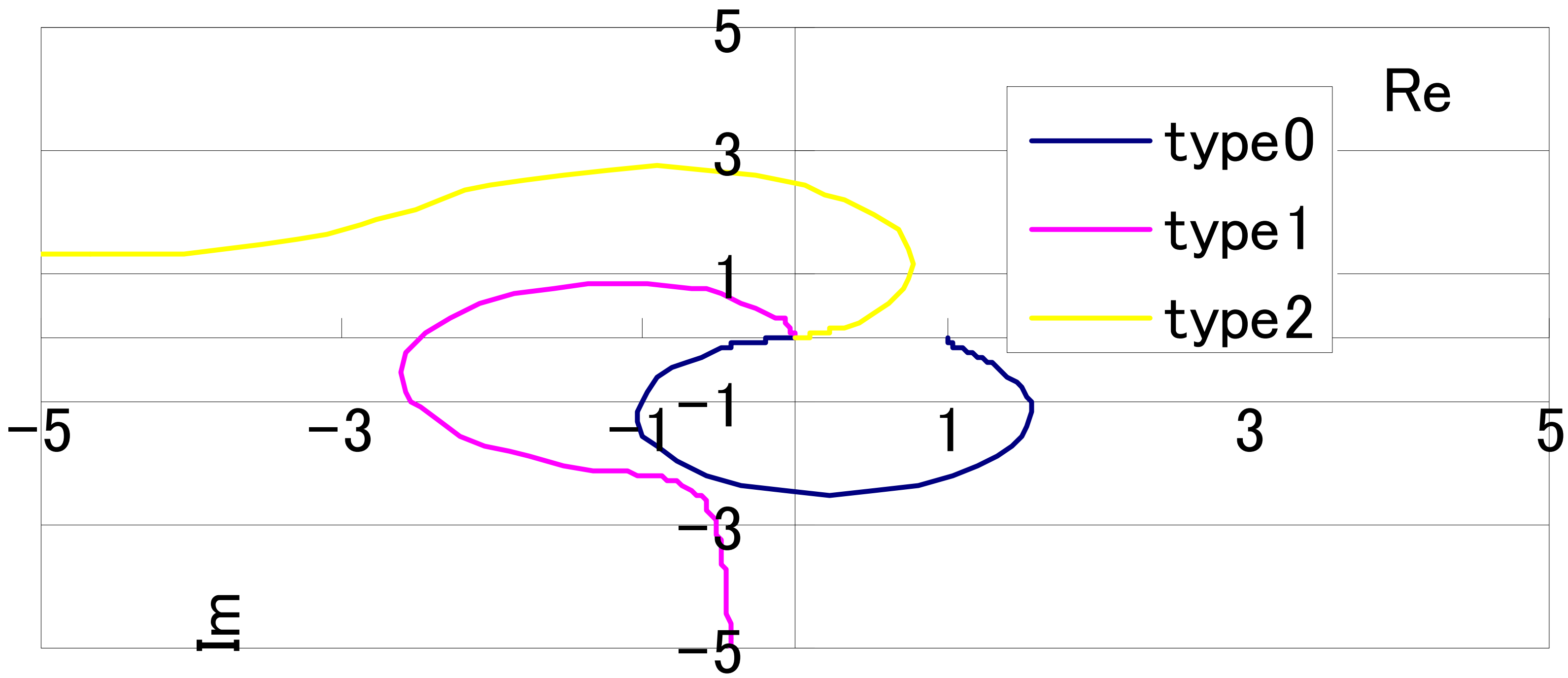
分母の零根次数 λ

$$=\frac{b_0+b_1s+\cdots b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots a_ns^n}$$

$$G(j\omega)=\frac{K(1+j\omega T_{b1})(1+j\omega T_{b2})\cdots(1+j\omega T_{bn-\lambda})}{(j\omega)^{\lambda}(1+j\omega T_{a1})(1+j\omega T_{a2})\cdots(1+j\omega T_{an-\lambda})}$$

$$=\frac{b_0+b_1(j\omega)+\cdots b_m(j\omega)^m}{a_0+a_1(j\omega)+\cdots a_n(j\omega)^n}$$

ナイキスト線図7



ナイキスト線図8

- Type0(λ =0)
  - 開始点(ω=0)実軸上の点。傾きは虚軸に平行
  - 終端点(ω=∞)原点
- Type1(λ =1)
  - 分母のjωが-90°位相をずらす
  - 開始点:振幅∞，位相-90°
  - 終端点(ω=∞):振幅0，傾き:軸に平行
- Type2(λ =2)
  - 分母の(jω)^2が-180°位相をずらす
  - 開始点:振幅∞，位相-180°
  - 終端点(ω=∞):振幅0，傾き:実軸の負の部分に平行

ニコルス線図

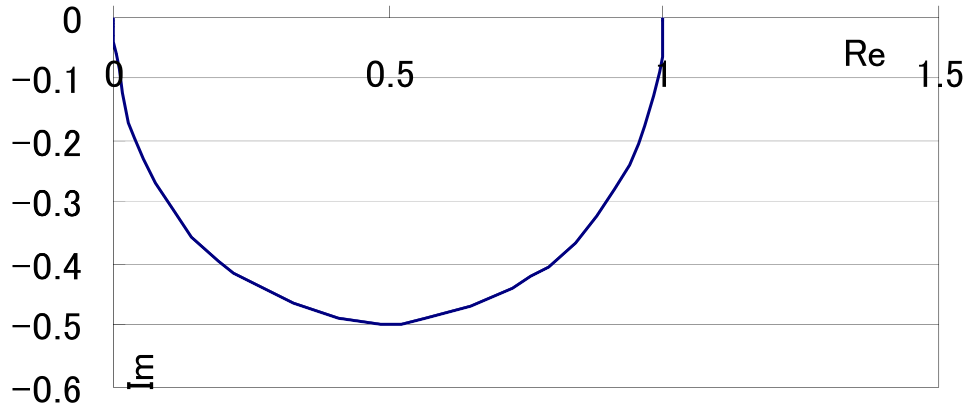
- 対数振幅(dB表示)-位相(位相余裕Φ-(-180))
  - ボード線図は対数振幅と位相を別の線で表示
  - ニコルス線図は同時に表示
    - 閉ループシステムの安定性が分かる
    - 正弦波伝達関数のG(jω)と1/G(jω)は歪対称

$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log\left|G(j\omega)\right|$$

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

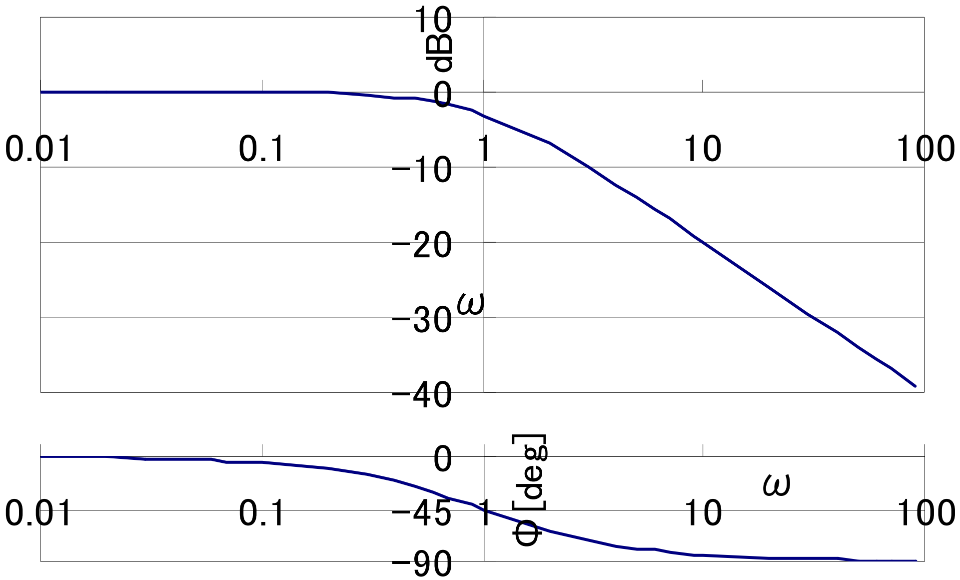
ニコルス線図

ナイキスト線図

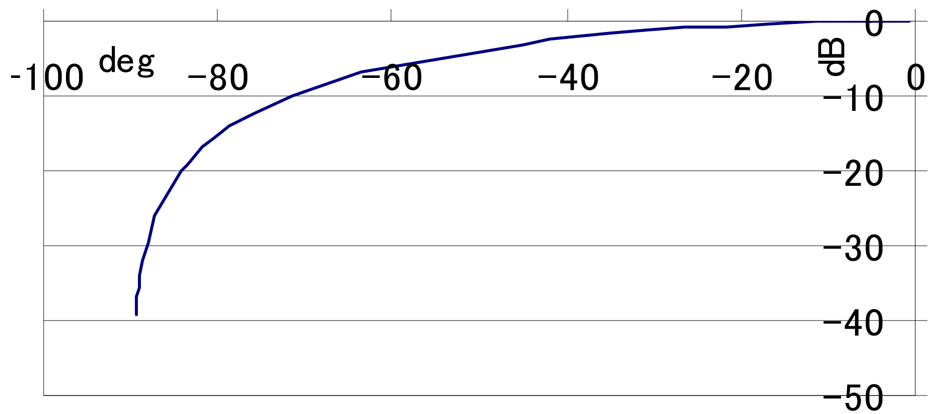


$$\frac{1}{1+j\omega T}$$

ボード線図



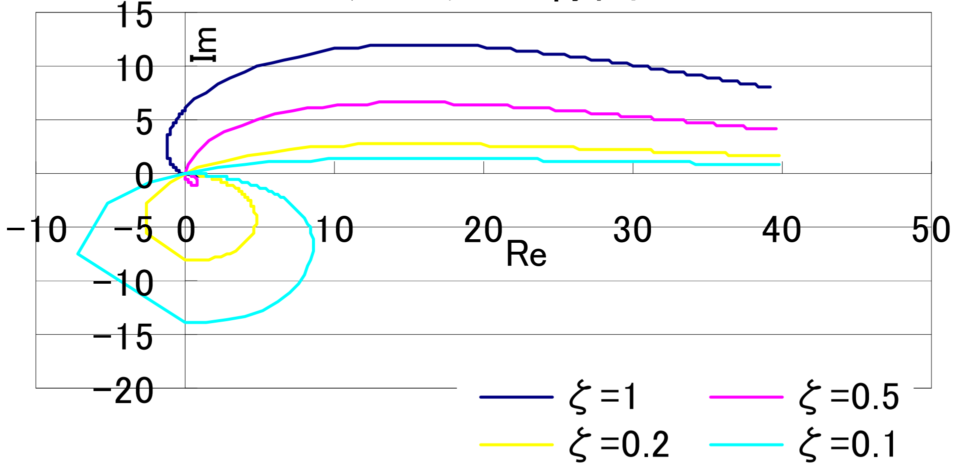
ニコルス線図



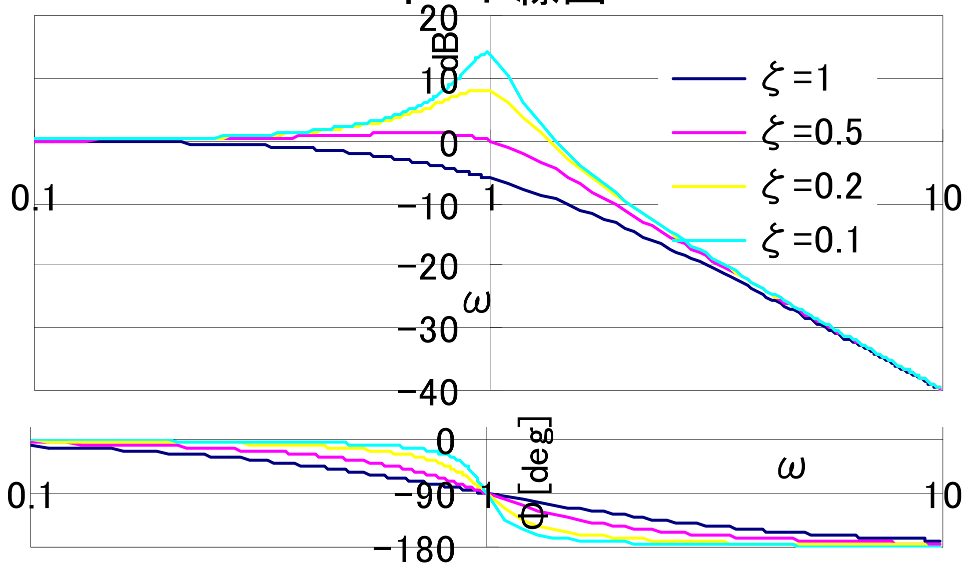
ニコルス線図

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

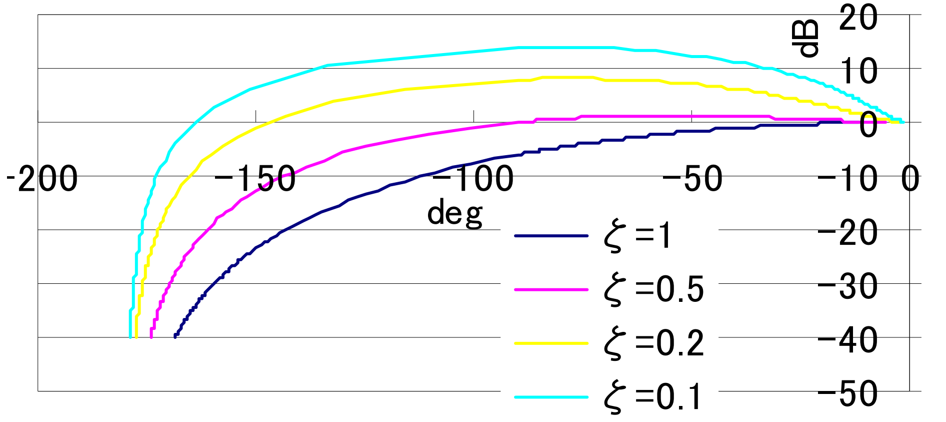
ナイキスト線図



ボード線図



ニコルス線図



過渡応答

過渡と定常状態

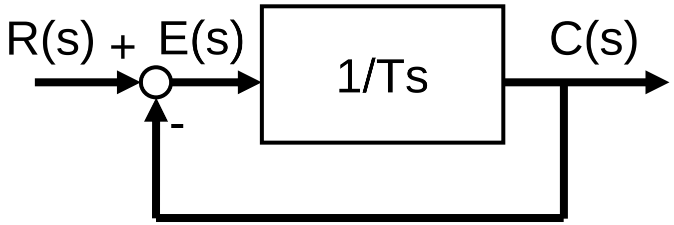
- 制御システムの時間応答

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

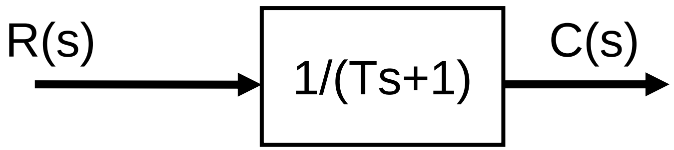
  - 過渡応答Ctr(t)
    - 初期状態から最終状態への遷移
  - 定常状態Css(t)
    - 時間tが∞となった時の値
- 出力の入力に対する依存性
  - ステップ入力
  - インパルス入力
  - ランプ入力などなど

一次のシステムの応答

- 一次のシステム
  - 具体的には
    - RC回路
    - 熱回路
  - 伝達関数



まとめると



$$\begin{cases} C(s) = \dfrac{1}{Ts} E(s) \\ E(s) = R(s) - C(s) \end{cases}$$

$$C(s) = \frac{1}{Ts}\left[R(s) - C(s)\right]$$

$$C(s)\left[1 + \frac{1}{Ts}\right] = \frac{1}{Ts} R(s) \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

一次のシステムの応答
単位ステップ入力1

- 入力R(s)が単位ステップ関数
  - 伝達関数 $R(s)=\frac{1}{s}$
- 出力 $C(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}$
  - 部分分数展開 $C(s)=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$
  - ラプラス逆変換 $c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}},t\geq 0$
    - 時定数T $c(T)=1-e^{-1}=0.632$

一次のシステムの応答
単位ステップ入力2

- t=0の接線の傾き

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

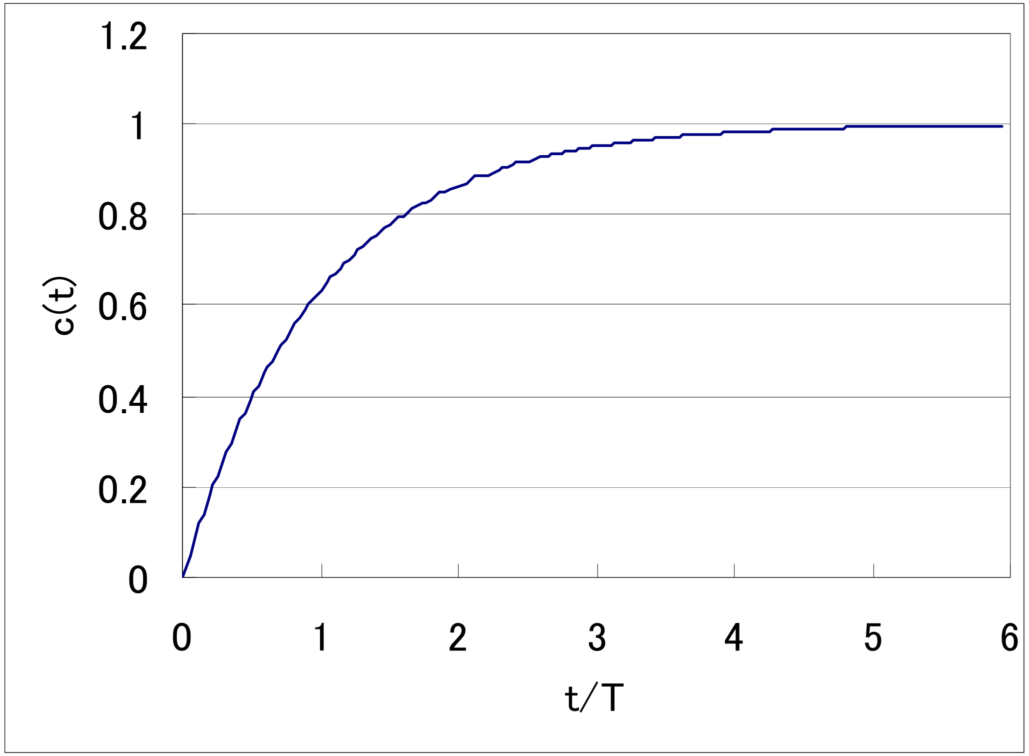
$$C(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

$$C(2T) = 0.865$$

$$C(3T) = 0.95$$

$$C(4T) = 0.982$$

$$C(5T) = 0.993$$



t>4Tでは最終値に2%未満の誤差に近づく

一次のシステムの応答
ランプ波入力1

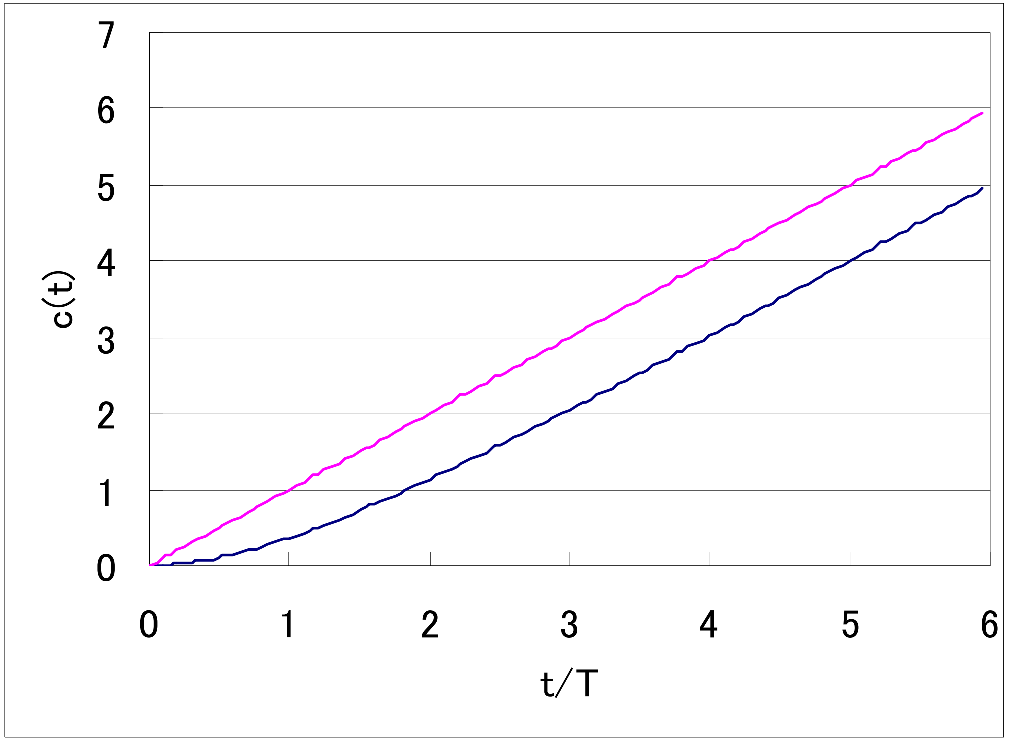
- 単位ランプ波入力R(s)　$L\left[t^n\right]=n!\,s^{-(n+1)}$
  - 伝達関数　$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$
- 出力
$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2}$$
  - 部分分数展開　$C(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{T}{s}+\dfrac{T^2}{Ts+1}=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{T}{s}+\dfrac{T}{s+\dfrac{1}{T}}$
  - ラプラス逆変換　$c(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}},t\geq 0$
    - 誤差
$$e(t)=r(t)-c(t)=t-\left\{t-T+Te^{-\frac{t}{T}}\right\}=T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

一次のシステムの応答
ランプ波入力2

- 誤差e(t)
  - $e^{-\frac{t}{T}}$ は t→∞でt=0となる

$$e(\infty) = T$$

  - 時定数が短いほど誤差小



一次のシステムの応答 インパルス入力1

- 単位インパルス波入力R(s)
  - 伝達関数

$$R(s)=1$$

- 出力

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

  - ラプラス逆変換

$$c(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}},t\geq 0$$