制御工学I　第11回
過渡特性

平成21年6月29日

線形時不変システムの性質

- 一次システムの応答 $\dfrac{1}{1+sT}$
  - 単位ランプ波入力の応答 $R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

    $$c(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0$$

  - 単位ステップ入力に対する応答 $R(s)=\dfrac{1}{s}$

    $$c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0$$

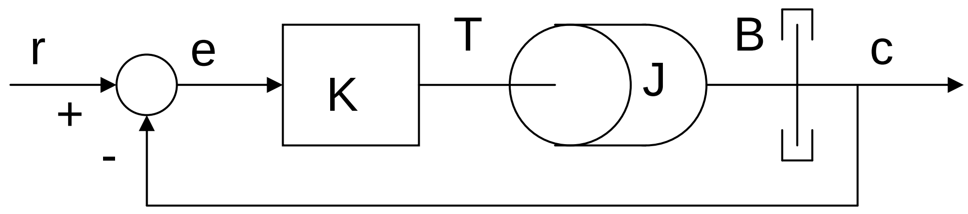
    - 単位ランプ波入力の微分に相当
  - 単位インパルス波入力に対する応答 $R(s)=1$

    $$c(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0$$

    - 単位ステップ入力の微分に相当

二次のシステムの応答

- サーボシステム
  - 比例制御系
    - 入力位置r
    - 制御出力位置c
  - 負荷
    - 慣性J
    - 粘性抵抗B
    - トルクT
    - 運動方程式 $J\ddot{c}+B\dot{c}=T$



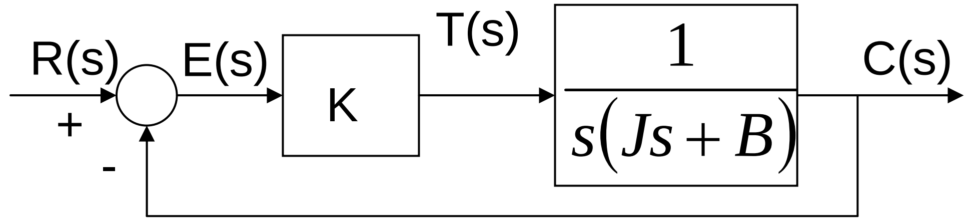
ラプラス変換

$$Js^2C(s)+BsC(s)=T(s)$$

二次のシステムの応答

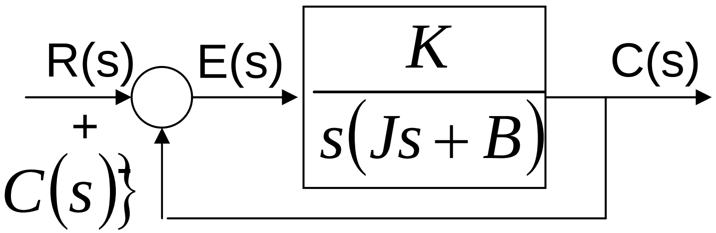
- サーボシステム
  - 伝達関数

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$



- 閉ループ伝達関数

$$T(s) = K\{R(s) - C(s)\}$$



$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s) = K\{R(s) - C(s)\}$$

$$Js^2C(s) + BsC(s) + KC(s) = KR(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + B/J\, s + K/J}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 閉ループ伝達関数

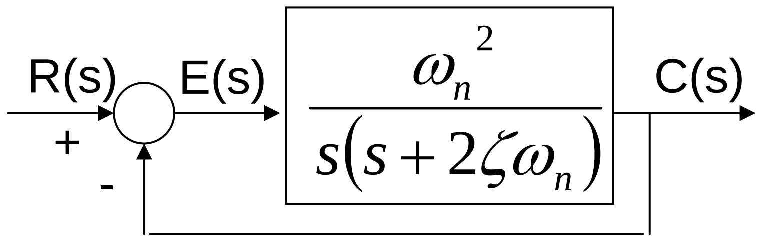
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + B/J\,s + K/J}$$

$$= \frac{K/J}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{J}{K}}\right]\left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{J}{K}}\right]}$$

  – 共役複素極　$B^2 - 4JK < 0$
  – 実極　$B^2 - 4JK \geq 0$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 減衰:σ
- 非減衰固有周波数:ωn
- 減衰比:ζ
  - 臨界制動Bcに対する減衰Bの比



$$\frac{K}{J}=\omega_n{}^2 \qquad \frac{B}{J}=2\zeta\omega_n=2\sigma \qquad B_c=2\sqrt{JK} \qquad \zeta=\frac{B}{B_c}=\frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

- 閉ループ伝達関数の標準形

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 二次のシステムの動特性
  - 二つのパラメータζ，ωnに支配される
    - 弱制動:0<ζ<1→振動的
      - :極が複素根となる
    - 過渡応答が永続(持続振動):ζ=0
    - 臨界制動:ζ=1
    - 過制動:ζ>1

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 弱制動:0<ζ<1→振動的

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

  - このままではラプラス逆変換できない

– 固有減衰周波数ωd

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

– 単位ステップ入力に対する応答

$$C(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}\frac{1}{s}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 部分分数展開

$$\omega_n{}^2 = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{\omega_n{}^2}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2\right)}\frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2}
\end{aligned}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 部分分数展開

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}-\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}$$

- ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$L^{-1}\left[\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

$$L^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t + \zeta\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)$$

減衰比ζで応答が変化

$$\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}, \cos\theta = \zeta$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 入出力の誤差

$$
\begin{aligned}
e(t) &= r(t) - c(t) \\
&= 1 - \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right) \right\} \\
&= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right)
\end{aligned}
$$

減衰正弦波。t=∞で誤差は無くなる。

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 減衰の無い場合ζ=0　$C(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2 + \omega_n{}^2}$
  - 応答は固有周波数での非減衰振動となる
  - 出力　$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$
    - 現実的にはζ=0とはならないので，非減衰の固有周波数ωnは観測できない
    - 観測できるのは減衰固有周波数ωd

$$\omega_n{}^2 = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 非減衰の固有周波数より低い
- 減衰が増えると周波数は低下する
- 減衰ζが一を超えると過制動となる振動しない

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 臨界制動(ζ=1)
  - 伝達関数の二つの極が等しい
  - 単位ステップ入力R(s)=1/sに対する応答

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}$$

    - ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right]$$

$$=1-e^{-\omega_n t}-e^{-\omega_n t}\omega_n t=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$