制御工学I　第12回
過渡特性

平成21年7月6日

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 臨界制動(ζ=1)

$$L^{-1}\left[\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}\right]=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

- 弱制動の極限としての臨界制動ζ→1

$$\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t=\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$$

$$=\lim_{\zeta\to 1}\zeta\omega_n t\frac{\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}=\omega_n t$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 弱制動の極限をとるζ→1

$$\lim_{\zeta\to 1} c(t) = \lim_{\zeta\to 1} 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)$$

一致する

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 過制動(ζ>1)
  - 伝達関数の二つの極が実負で異なる
  - 単位ステップ入力R(s)=1/sに対する応答

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2\right)}\frac{1}{s}$$

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s&=-\zeta\omega_n\pm\sqrt{(\zeta\omega_n)^2-\omega_n{}^2}\\ &=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\\ &=-\left(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n \end{aligned}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{\left[s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]\left[s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{s}$$

- 部分分数の係数を求める

$$\left[s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]C(s)\Big|_{s=-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{\left[-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

$$\left[s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]C(s)\Big|_{s=-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{\left[-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$sC(s)\big|_{s=0}=\frac{\omega_n{}^2}{\left[0+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]\left[0+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}$$

$$=\frac{1}{\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{1}{\zeta^2-\left(\zeta^2-1\right)}=1$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 部分分数展開

$$C(s)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{\dfrac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{\dfrac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}\right]+\frac{1}{s}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{\dfrac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{\dfrac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}\right]\right]=$$

$$=1+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

- 定数項と二つの単調減衰項で構成される

二次のシステムの応答 ステップ応答

- 減衰係数ζが1よりかなり大きい場合
  - 指数関数的に減衰する二つの減衰項のうち一方は，もう一方に比べかなり早く減衰する
    - 早く減衰する方の振る舞いは無視できる

$$s_1 = \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), s_2 = \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right]$$

      - -s1に比べ,-s2が虚軸に近いなら-s1の項は無視できる
  - 早く減衰する項が収束した後，一次のシステムの応答で近似できる

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 二次システムの応答の一次システムの応答での近似
  - 二次システムの応答

$$c(t)=1+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1}-\frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right]$$

    - 初期値:0
    - 終端値:1
  - 一次システムでの近似(s1無視)

$$C(s)=\frac{k}{s(s+s_2)}$$

    - 係数kを求める

$$sC(s)\Big|_{s=0}=\frac{k}{0+s_2}=\frac{k}{s_2} \quad [s+s_2]C(s)\Big|_{s=-s_2}=\frac{k}{-s_2}$$

$$C(s)=\frac{k}{s_2}\frac{1}{s}-\frac{k}{s_2}\frac{1}{s+s_2}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 一次システムのラプラス逆変換

$$c(t)=\frac{k}{s_2}-\frac{k}{s_2}e^{-s_2 t}$$

  – 初期値:0→一致

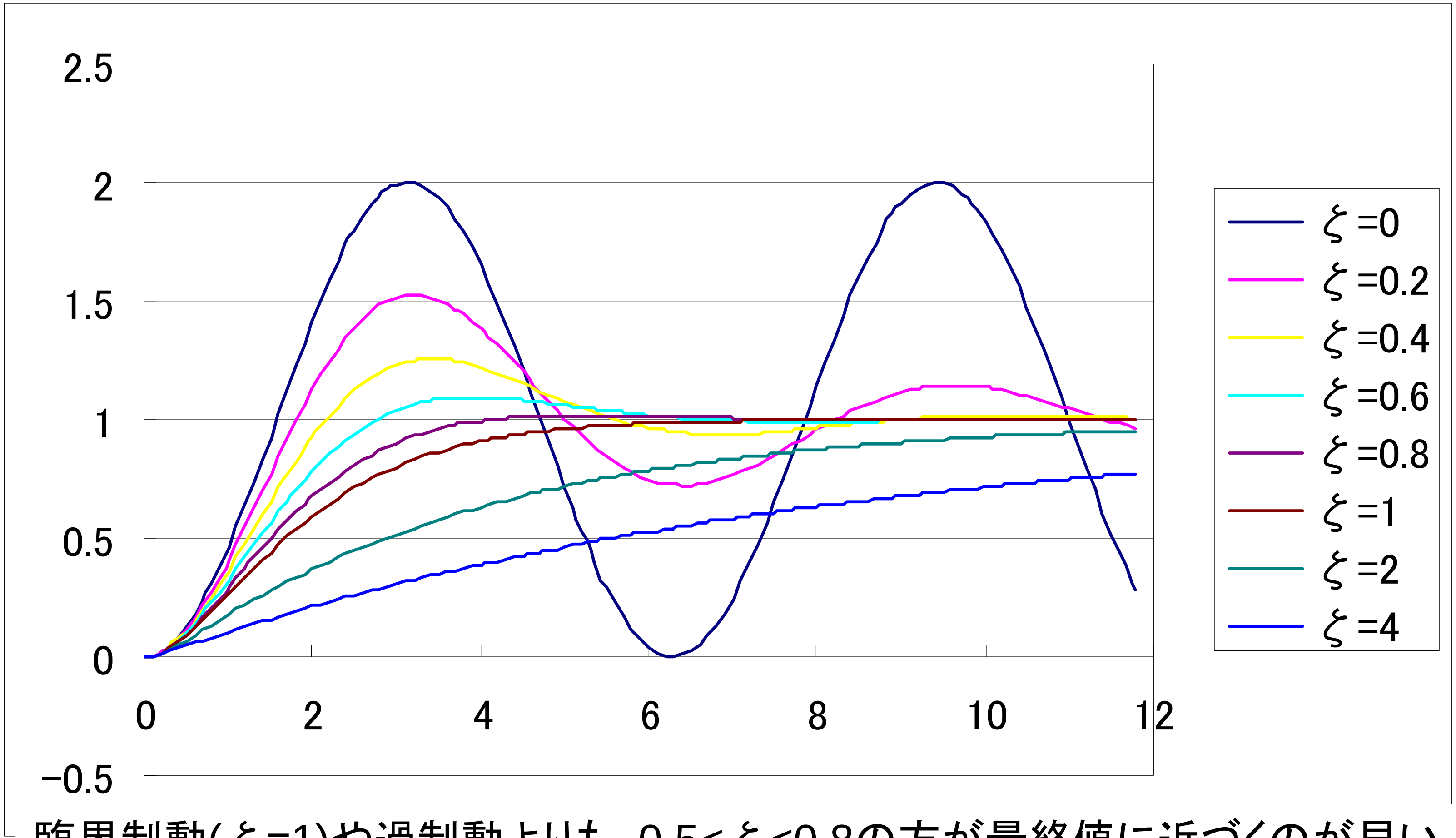
  – 終端値一致させる $\frac{k}{s_2}=1 \quad k=s_2$

$$c(t)=1-e^{-s_2 t}$$

$$C(s)=\frac{s_2}{s(s+s_2)}=\frac{\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{s\left(s+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)}$$

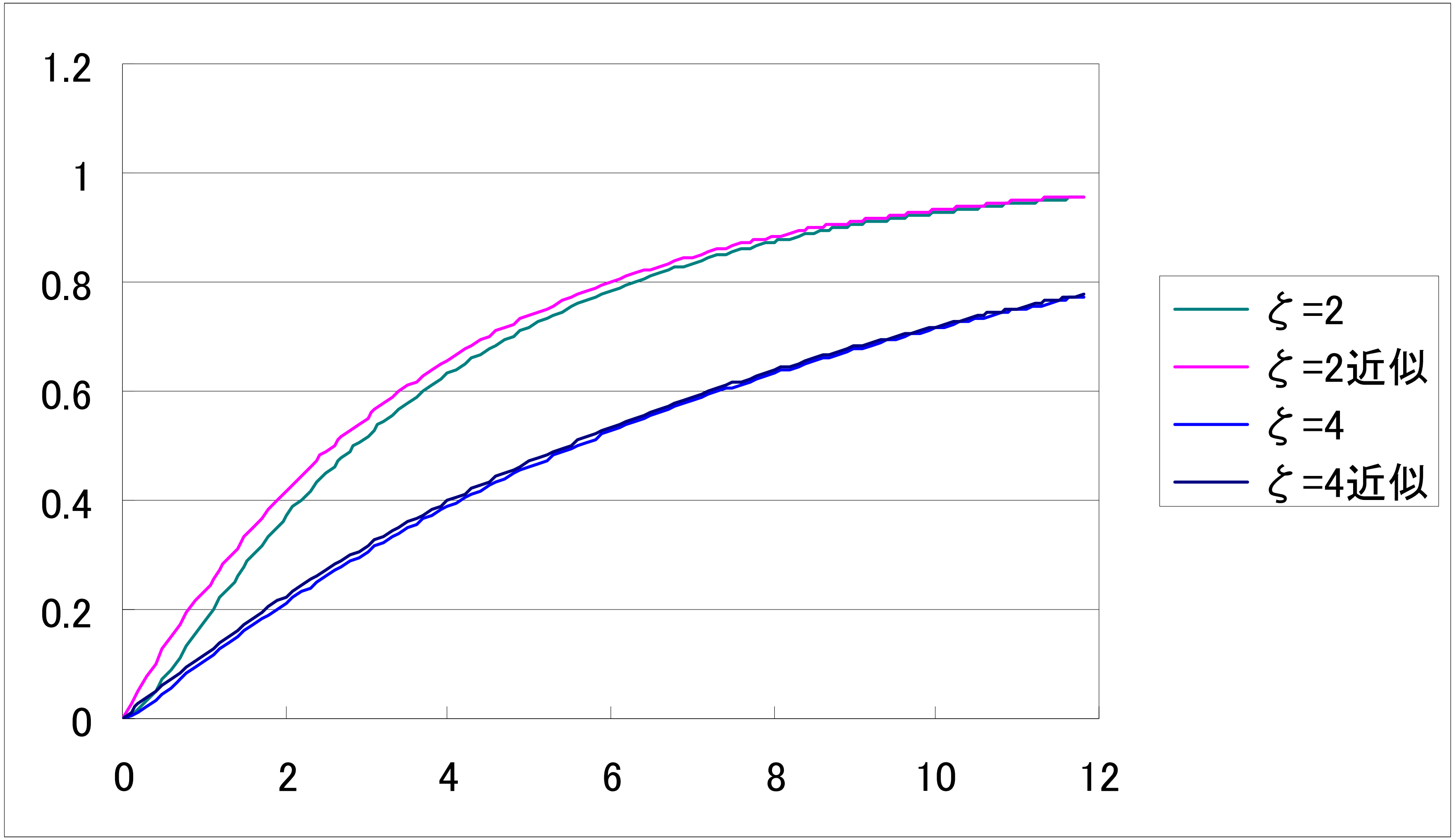
- 近似した伝達関数 $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s_2}{s+s_2}=\frac{\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{s+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$

二次のシステムの応答
ステップ応答



臨界制動(ζ=1)や過制動よりも，0.5<ζ<0.8の方が最終値に近づくのが早い

二次のシステムの応答
ステップ応答



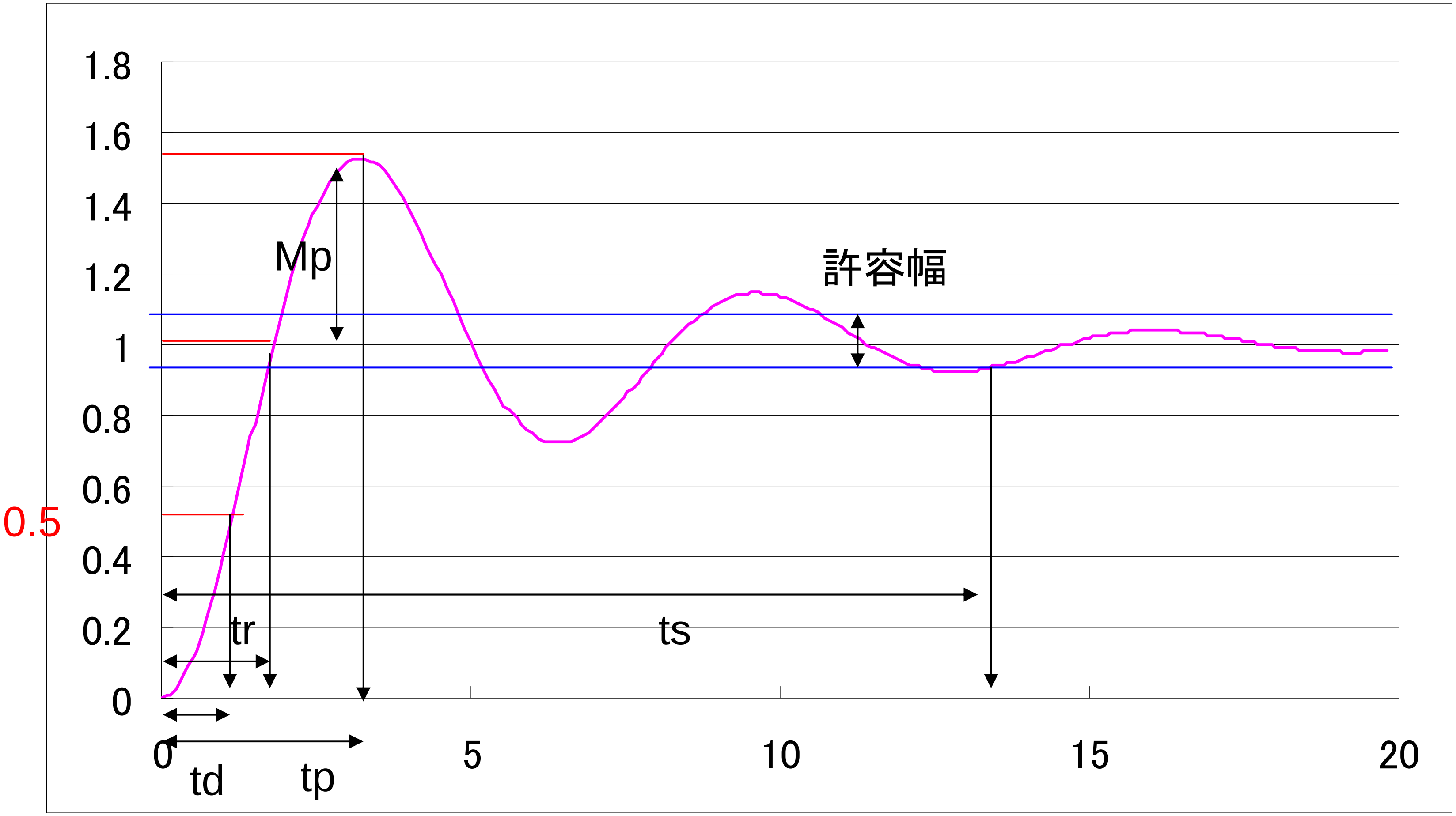
ステップ応答

- 単位ステップ入力に対する応答の評価基準
  - 遅延時間:t_d
    - 最終値の半分の値に至る時間
  - 立ち上がり時間:tr
    - 10%→90%(過制動), 5%→95%, 0%→100%(弱(不足)制動)
  - ピーク時間:tp(過制動には無い)
    - オーバーシュートにおける最初のピークの時間
  - 最大行き過ぎ量:Mp(過制動には無い)
    - 相対的な安定性を示す

$$M_p(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

  - 整定時間:ts
    - 最終値の2%または5%に値が収まる時間
    - 制御系の最も時定数の長いものに関係する

ステップ応答



ステップ応答

- 過渡応答の設計
  - 振動が許容されないシステムを除き，過渡応答には速い追従と十分な減衰が要求される
    - 二次のシステム
      - $0.4<\zeta<0.8$が適当
      - $0.4>\zeta$ではオーバシュート過剰となる
      - $0.8<\zeta$では応答が遅くなる
      - 最大オーバシュート量と立ち上がり時間は競合する
        - » 両者を同時に小さくする事はできない

ステップ応答

- 二次のシステムの応答

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

  - パラメータの決定:ζ,ωn
  - 立ち上がり時間:tr
    - 0%→100%とする。
    - 過渡応答の解析解:c(tr)=1を解く

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t_r + \zeta\sin\omega_d t_r\right)$$

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t_r + \zeta\sin\omega_d t_r\right) = 0$$

ステップ応答

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \neq 0 \qquad より \qquad \sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t_r + \zeta \sin\omega_d t_r = 0$$

$$\frac{\sin\omega_d t_r}{\cos\omega_d t_r} = \tan\omega_d t_r = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad より$$

$$\tan\omega_d t_r = \frac{-\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{-\omega_d}{\sigma}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\arctan\frac{-\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{\omega_d}\arctan\frac{-\omega_d}{\sigma}$$

- trを小さくするにはωdを大きくする