制御工学I　第13回
過渡特性

平成21年7月13日

ステップ応答

- ピーク時間:tp
  - 過渡応答波形の極値を取る時間(時間微分=0)

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t + \zeta\sin\omega_d t\right)$$

$$\frac{d}{dt}c(t) = -\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t + \zeta\sin\omega_d t\right)$$

$$-\frac{-e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(-\omega_d\sqrt{1-\zeta^2}\sin\omega_d t + \omega_d\zeta\cos\omega_d t\right)$$

$$= -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\begin{pmatrix} -\zeta\omega_d\cos\omega_d t - \omega_n\zeta^2\sin\omega_d t \\ -\omega_n\left(1-\zeta^2\right)\sin\omega_d t + \omega_d\zeta\cos\omega_d t \end{pmatrix}$$

ステップ応答

$$\frac{d}{dt}c(t)=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n \sin\omega_d t$$

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p}=\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n \sin\omega_d t_p=0$$

$$e^{-\zeta\omega_n t_p}\neq 0 \qquad \sin\omega_d t_p=0$$

$$\omega_d t_p=0,\pi,2\pi,3\pi,\cdots$$

- 最初のピーク

$$\omega_d t_p=\pi$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$$ 減衰振動周期の半分に相当

ステップ応答

- 最大オーバーシュート量:Mp
  - ピーク時間tpに発生

$$c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t_p + \zeta\sin\omega_d t_p\right)$$

$$c\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) = 1 - \frac{e^{\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\pi + \zeta\sin\pi\right)$$

$$= 1 + e^{\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} = 1 + e^{\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

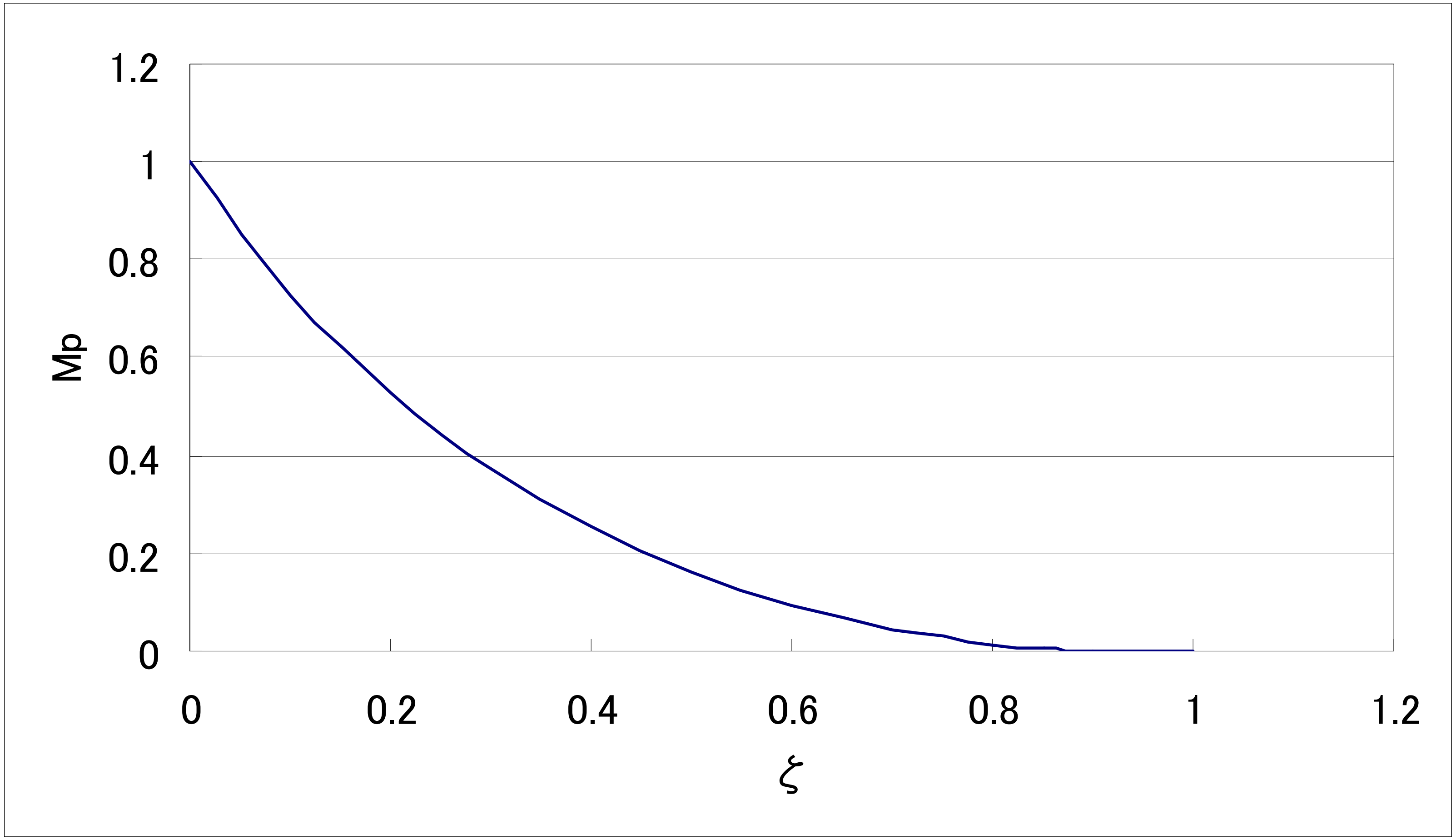
$$\sigma = \zeta\omega_n,$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = \frac{1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} - 1}{1} = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$c(\infty) = 1$$

ステップ応答



0.4<ζ<0.7ではオーバーシュートは25%から4%となる

ステップ応答

- 整定時間:ts
  - 不足制動時の過渡応答

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

  - 単位ステップ入力に対する応答の包絡線

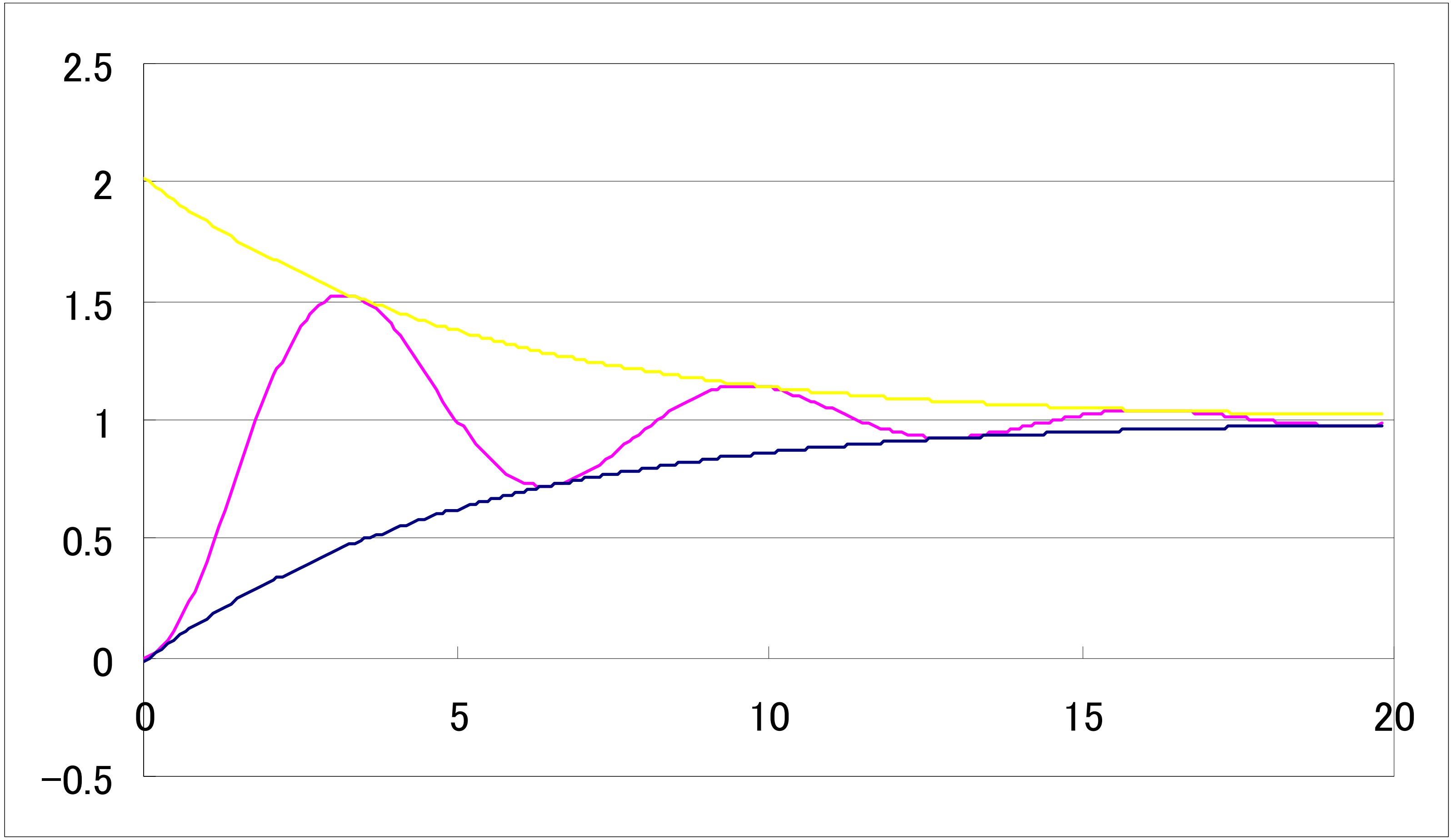
$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

    - 時定数 $\frac{1}{\zeta\omega_n}$
    - 与えられたωnに対して整定時間は減衰比ζの関数
    - 時定数での近似

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}\ for 2\%$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n}\ for 5\%$$

ステップ応答

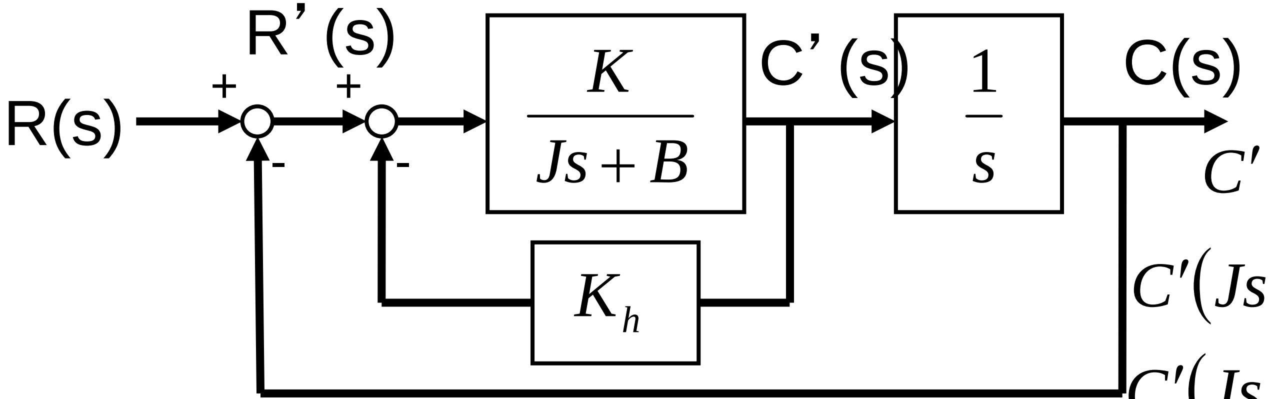


速度フィードバックのサーボシステム

- システムの性能向上のため出力信号の微分値を利用
  - 位置の時間微分→速度
  - 微分は雑音に弱い
    - デジタル制御において微分は困難
    - タコメータ(直流発電機)
      - 速度起電力が回転速度に比例
      - 微分量が容易に得られる

速度フィードバックのサーボシステム

- サーボシステム
  - 位置信号と速度信号のフィードバック

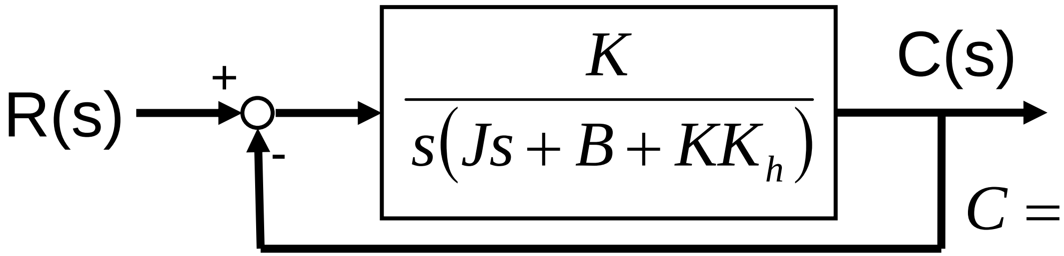


$$C' = \frac{K}{Js+B}\left(R' - C'K_h\right)$$

$$C'\left(Js+B\right) = K\left(R' - C'K_h\right)$$

$$C'\left(Js+B+KK_h\right) = KR'$$

$$C' = \frac{K}{Js+B+KK_h}R'$$



$$C = \frac{C'}{s} = \frac{K}{s\left(Js+B+KK_h\right)}R'$$

速度フィードバックのサーボシステム

- 伝達関数

$$C = \frac{K}{s\left(Js + B + KK_h\right)}\left(R - C\right)$$

$$C\left[1 + \frac{K}{s\left(Js + B + KK_h\right)}\right] = \frac{K}{s\left(Js + B + KK_h\right)}R$$

$$C\left[s\left(Js + B + KK_h\right) + K\right] = KR$$

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s\left(Js + B + KK_h\right) + K}$$

$$= \frac{K}{Js^2 + \left(B + KK_h\right)s + K}$$

速度フィードバックのサーボシステム

- 伝達関数 $$\frac{C}{R}=\frac{K/J}{s^2+(B+KK_h)/J\,s+K/J}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$
  - 固有周波数 $\omega_n=\sqrt{\frac{K}{J}}$
    - フィードバックの影響なし
  - 減衰係数 $$\zeta=\frac{B+KK_h}{J}\frac{1}{2\omega_n}=\frac{B+KK_h}{J}\frac{1}{2\sqrt{\frac{K}{J}}}=\frac{B+KK_h}{2\sqrt{KJ}}$$
    - 速度フィードバックで減衰を大きくできる
      - オーバシュートが小さくなるようKhでζを0.4~0.7にする

二次のシステムのインパルス応答

- 単位インパルス入力:r(t)
  - ラプラス変換:R(s)=1
    - 単位インパルス応答は単位ステップ応答の微分でもある
  - 二次システムの応答
    - ζ>1

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{\omega_n{}^2}{\left[s+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]\left[s+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$\left[s+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]C(s)\Big|_{s=-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$=\frac{\omega_n}{-2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$\left[s+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]C(s)\Big|_{s=-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$C(s)=\frac{-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}+\frac{\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$c(t)=-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$

過制動ではc(t)>0となる

二次のシステムのインパルス応答

- ζ =1

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

$$=\omega_n{}^2\left(\frac{1}{s+\omega_n}\right)^2$$

$$c(t)=\omega_n{}^2te^{-\omega_n t}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 0≦ζ<1

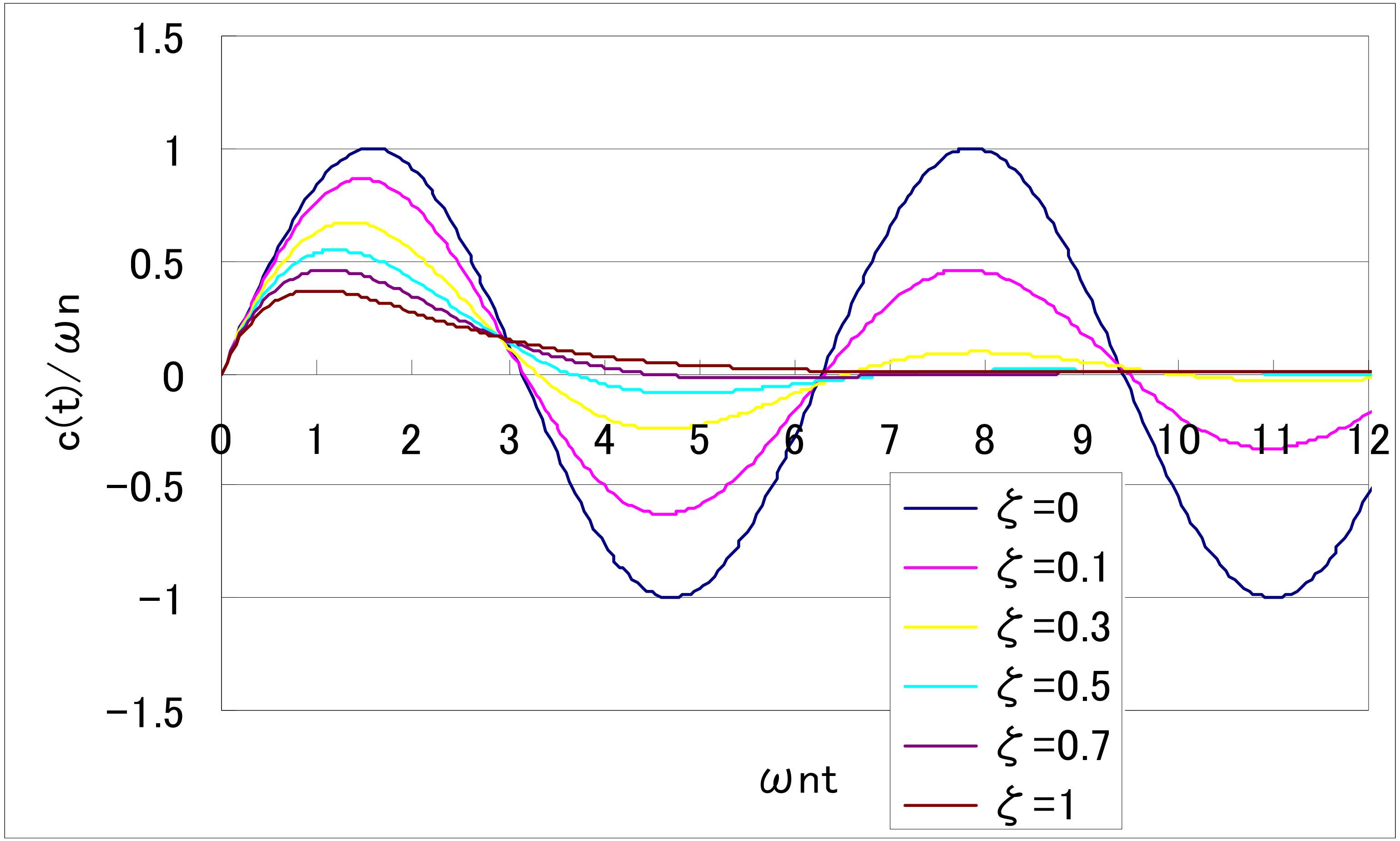
$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{\omega_n{}^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n{}^2}$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n{}^2}$$

$$c(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t$$

弱制動では振動的となる

二次のシステムのインパルス応答



二次のシステムのインパルス応答

- 過制動･臨界制動時はc(t)の符号は変化なし
  - この時ステップ応答はオーバシュートを生じない
    - 単調減少で収束する
- 弱制動における最大オーバシュート
  - 極値をとるt

$$\frac{d}{dt}c(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right]$$

$$=0$$

二次のシステムのインパルス応答

$$\frac{d}{dt}c(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\begin{bmatrix}-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t \\ +\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\begin{bmatrix}-\zeta\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t \\ +\sqrt{1-\zeta^2}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\end{bmatrix}$$

$$-\zeta\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\sqrt{1-\zeta^2}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t=0$$

$$\zeta\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t=\sqrt{1-\zeta^2}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t$$

$$\frac{\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t}{\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t}=\tan\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$t = \frac{\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 最大オーバシュート値

$$c\left(\frac{\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\right)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n\frac{\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}}\sin\left[\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\frac{\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\right]$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}\sin\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right]$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}\sin\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta^2+\zeta^2}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$c\left(\frac{\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\right)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\cong\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}$$

高次のシステム

- 高次のシステムの応答は下記を足し合わせ
  – 一次のシステムの応答
  – 二次のシステムの応答