制御工学I
第二回　ラプラス変換1

平成21年4月13日

制御の実現

- 制御対象のモデリング。
  - 制御対象のモデル化
    - 微分方程式・代数方程式
    - 物理モデルによる入出力関係の表現（物理・化学法則）。
  - 簡略化
    - 制御則の設計に適した形
    - 線形化
- 制御則の設計
  - 誤差の考慮
    - モデル化
    - 簡略化
    - 実装
- システムの特性評価
  - 制御則をシステムに実装
  - 実システム・数値解析で評価

制御理論の歴史と分類

- 古典制御
  - 本授業の対象
  - ～1950
  - PID
  - 伝達関数
  - 周波数応答
- 現代制御
  - 1960～1980
  - 状態方程式
  - 多入出力系
  - 可制御性･可観測性
  - 最適レギュレータ
- その他
  - 1980～
  - H∞制御
    - 外乱抑制性能をH∞ノルムで評価
    - ロバスト安定性
  - NN制御
  - ファジイ制御

ラプラス変換

- 線形常微分方程式
  - Laplace変換
    - 微分・積分演算を，複素変数(演算子)sを用いて表す事により，代数演算として扱う事を可能にする変換
    - 代数方程式の解を求める事で，微分方程式を求解
    - 逆Laplace変換により，通常の微分方程式の解として表す

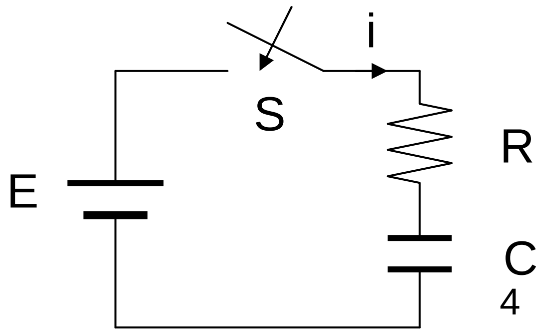
$$\frac{d}{dt}q = i = \frac{d}{dt}Cv = C\frac{d}{dt}v$$

$$E = Ri + v = Ri + \frac{q}{C}$$

一般解

$$q = ke^{-\frac{1}{RC}t} + EC$$

特解



複素変数･関数の復習

- ラプラス変換では実関数から複素関数へ変換
- 複素関数
  - 複素変数の性質を持つ　$s = \sigma + j\omega$
  - 複素変数に対する関数も複素量として表される

$$F(s) = F_x + jF_y$$

  - 振幅　$\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}$
  - 位相　$\arctan\left(F_y / F_x\right)$
  - 逆回転の(共役)複素数

$$\overline{F(s)} = F_x - jF_y$$

複素変数・関数の復習

- 複素関数の微分(正則関数←微分可能)

$$\frac{d}{ds}G(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{G(s+\Delta s)-G(s)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta s}$$

  – 変数s　$\Delta s=\Delta\sigma+j\Delta\omega$
    - 直交平面上で極限のとり方が一意でない
      – 実軸上での微分

$$\frac{d}{ds}G(s)=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\left(\frac{\Delta G_x}{\Delta\sigma}+j\frac{\Delta G_y}{\Delta\sigma}\right)=\frac{\partial G_x}{\partial\sigma}+j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma}$$

      – 虚軸上での微分

$$\frac{d}{ds}G(s)=\lim_{j\Delta\omega\to 0}\left(\frac{\Delta G_x}{j\Delta\omega}+j\frac{\Delta G_y}{j\Delta\omega}\right)=-j\frac{\partial G_x}{\partial\omega}+\frac{\partial G_y}{\partial\omega}$$

複素変数・関数の復習

- 複素関数の微分
  - 複素微分可能
    - どのような近づけ方でも一つの値に収束

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = -j\frac{\partial G_x}{\partial \omega} + \frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

  - コーシー・リーマンの関係

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial G_y}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial G_y}{\partial \sigma} = -j\dfrac{\partial G_x}{\partial \omega} \end{cases}$$

ラプラス変換

- 定義
  - $f(t)$ 時間関数。 $t < 0$ に対して$f(t) = 0$
  - s 複素変数
    ラプラス演算記号
  - $F(s)$ 関数 $f(t)$ のラプラス変換
- ラプラス変換の定義

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

ラプラス変換

- ラプラス変換の効能
  - 線形常微分方程式を代数方程式に変換できる
    - ラプラス変換を部分積分

$$\int fg' dx = [fg] - \int f' g dx$$

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$= \left[f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

ラプラス変換

- ラプラス変換の効能
  - 線形常微分方程式を代数方程式に変換できる
    - つづき $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$

$$F(s) = \frac{1}{-s}\left[f(\infty)e^{-s\infty} - f(0)e^{-s0}\right]_0 - \frac{1}{-s}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

$$= \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$$

- 従って

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

ラプラス変換関数と
初期値で表せる

ラプラス変換

- 高次の微分方程式の変換

$$
\begin{aligned}
L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] &= L\left[\frac{d}{dt}f'(t)\right] \\
&= sF'(s) - f'(0) \\
&= sL\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] - f'(0) \\
&= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}
$$

$$
L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(n)}(0)s^{n-k}
$$

ラプラス変換

- 原関数がt=0で不連続の場合 $f(0+) \neq f(0-)$
  - t=0で微分できない
    - ステップ関数等
  - 0の周りで分ける

$$L_{+}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0+)$$

$$L_{-}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$$

ただし $t < 0$ $f(t) = 0$

ラプラス変換では，微分方程式を代数方程式の形で表せる。
微分方程式を求解するという点では，まだその効能は不明

ラプラス逆変換

- ラプラス変換した関数から原関数を求める
- Bromwich積分(複素積分)

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{-st}ds$$

  – ただしcは定数，特異点より大きい必要有。
  – この積分はめんどい
    - 部分分数展開して，逆変換を簡単化する

ラプラス逆変換

- 原関数f(t)のラプラス変換F(s)
  - A(s),B(s)はsの多項式
  - A(s)の次数はB(s)より大
  - 部分分数展開
    - 分母関数の因数分解必要

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

  - ラプラス逆変換

$$\begin{aligned}L^{-1}[F(s)]&=L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]\\&=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)\end{aligned}$$

ラプラス逆変換

- 関数F(s)が重根を持たない場合
  - 部分分数展開

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \qquad m<n$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

$$\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}=\left[\begin{array}{l}\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)+ \\ \cdots+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\end{array}\right]_{s=-p_k}$$

$=a_k$ 係数akが求まる

ラプラス逆変換

- 関数F(s)が重根を持たない場合
  - 部分分数の逆変換

$$L^{-1}\left(\frac{a_k}{s+p_k}\right)=a_k e^{-p_k t}$$

  - 全体

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$$
$$=a_1 e^{-p_1 t}+a_2 e^{-p_2 t}+\cdots+a_n e^{-p_n t}$$