

制御工学I

第三回 ラプラス変換2

平成21年4月20日

線形時不変常微分方程式の解法

- 微分方程式の求解において積分定数の算出が必要
- ラプラス変換では初期値込みで計算
- d/dt を s に置き換えて計算できる
- ラプラス変換での微分方程式の求解法
 - 微分方程式をラプラス変換し, s に関する代数方程式に変換
 - ラプラス逆変換で時間領域の解を得る

線形時不変常微分方程式の求解例1

- 二次の微分方程式と初期値

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, x(0) = a, \dot{x}(0) = b$$

– ラプラス変換 $L[x(t)] = X(s)$

$$L[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) = sX(s) - a$$

$$L[\ddot{x}(t)] = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2 X(s) - sa - b$$

$$[s^2 X(s) - sa - b] + 3[sX(s) - a] + 2X(s) = 0$$

$$[s^2 X(s) - sa - b] + 3[sX(s) - a] + 2X(s) = 0$$

$$[s^2 + 3s + 2]X(s) - sa - b - 3a = 0$$

$$[s^2 + 3s + 2]X(s) = sa + b + 3a$$

線形時不変常微分方程式の求解例1

- 部分分数展開

$$X(s) = \frac{sa + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{sa + b + 3a}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

S+1の項 $(s+1)X(s) \Big|_{s=-1} = \frac{sa + b + 3a}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{2a+b}{1}$

S+2の項 $(s+2)X(s) \Big|_{s=-2} = \frac{sa + b + 3a}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{a+b}{-1}$

- 逆変換

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{a+b}{s+2}\right] \\ &= (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \end{aligned}$$

2009/4/20 この例は、重根無しの最も簡単なもの。

もう少し複雑な微分方程式を解くために、ラプラス変換の諸性質を知る事が必要

ラプラス変換の収束性

- 関数 $f(t)$ のラプラス変換が存在するには, ラプラス積分が収束する必要有
- 収束の条件
 - 任意の $t>0$ において, $f(t)$ が区分連続
 - 関数 $f(t)$ は指数 α 位の関数(指数位数 α の指数関数)
$$f(t) = Ae^{-\alpha t}$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} |Ae^{-\alpha t}| = 0$$
- 収束座標 $\sigma = -\alpha$ において0への収束条件は $\sigma > -\alpha$

$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ は, s の実部である σ が収束座標実部より大きい時収束

ラプラス変換の収束性

- ラプラス変換が発散する(定義不可)の例

$$f(t) = e^{t^2}$$

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{t^2} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{t^2 - st} dt = \int_0^{\infty} e^{\left(t - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4}} dt \\ &= e^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^{\infty} e^{\left(t - \frac{s}{2}\right)^2} dt \rightarrow \infty \end{aligned}$$

– ただし, 時間を有限に区切れば収束する。

$$f(t) = \begin{cases} e^{t^2} & 0 \leq t \leq T < \infty \\ 0 & t < 0, T < t \end{cases}$$

ラプラス変換の諸性質

- ラプラス変換の線形作要素としての性質
 - 関数の定数倍A

$$L[Af(t)] = AL[f(t)]$$

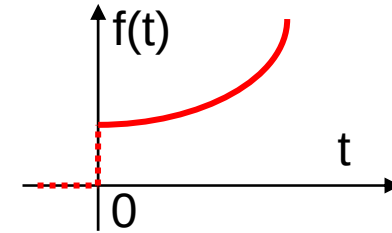
- 和

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$$

ラプラス変換の諸性質

- 指数関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & 0 \leq t \end{cases}$$

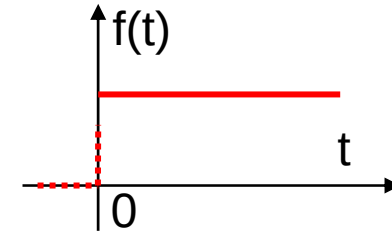


$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = -\frac{A}{s+\alpha} \left[e^{-(\alpha+s)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{A}{s+\alpha} \end{aligned}$$

－ただし、収束するにはsの実部は $-\alpha$ より大

ラプラス変換の諸性質

- ステップ関数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 \leq t \end{cases}$

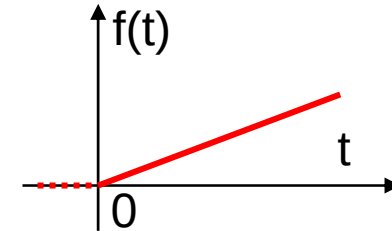


$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{A}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} \\ &= \frac{A}{s} \end{aligned}$$

- ただし, 収束するにはsの実部は0より大
- A=1の場合を単位ステップ関数

ラプラス変換の諸性質

- ランプ(傾斜)関数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & 0 \leq t \end{cases}$
 - 部分積分



$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt$$

$$= -\frac{A}{s} [te^{-st}]_0^{\infty} + \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2}$$

- 同様にして

$$f(t) = \frac{t^2}{2} \rightarrow \frac{1}{s^3}$$

$$f(t) = \frac{t^n}{n!} \rightarrow \frac{1}{s^{n+1}}$$

ラプラス逆変換

- 関数 $F(s)$ が重根を持つ場合

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p)^n} \quad m < n$$

$$= \frac{b_1}{s+p} + \frac{b_2}{(s+p)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(s+p)^n}$$

－係数 b_n を求める

$$\left[(s+p)^n \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p} = \left[\begin{aligned} &(s+p)^n \frac{b_1}{s+p} + (s+p)^n \frac{b_2}{(s+p)^2} + \cdots \\ &+ (s+p)^n \frac{b_k}{(s+p)^k} + \cdots + (s+p)^n \frac{b_n}{(s+p)^n} \end{aligned} \right]_{s=-p}$$

$$= b_n$$

低次の項は以下のように求める

ラプラス逆変換

- 関数 $F(s)$ が重根を持つ場合

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left[(s+p)^n \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p} &= \frac{d}{ds} \left[(s+p)^{n-1} b_1 + (s+p)^{n-2} b_2 + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (s+p)^{n-k} b_k + \cdots + (s+p) b_{n-1} + b_n \right]_{s=-p} \\ &= \left[(n-1)(s+p)^{n-2} b_1 + (n-2)(s+p)^{n-3} b_2 + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (n-k-1)(s+p)^{n-k-1} b_k + \cdots + b_{n-1} \right]_{s=-p} \\ &= b_{n-1}\end{aligned}$$

ラプラス逆変換

- 関数 $F(s)$ が重根を持つ場合

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+p)^n \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p} &= \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+p)^{n-1} b_1 + (s+p)^{n-2} b_2 + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + (s+p)^2 b_{n-2} + (s+p) b_{n-1} + b_n \right]_{s=-p} \\
 &= \frac{d}{ds} \left[(n-1)(s+p)^{n-2} b_1 + (n-2)(s+p)^{n-3} b_2 + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + 2(s+p) b_{n-2} + b_{n-1} \right]_{s=-p} \\
 &= \left[(n-1)(n-2)(s+p)^{n-3} b_1 + (n-2)(n-3)(s+p)^{n-4} b_2 \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + 2b_{n-2} \right]_{s=-p} \\
 &= 2b_{n-2}
 \end{aligned}$$

ラプラス逆変換

- 関数 $F(s)$ が重根を持つ場合

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^{n-l}}{ds^{n-l}} \left[(s+p)^n \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p} \\
 &= \frac{d^{n-l}}{ds^{n-l}} \left[(s+p)^{n-1} b_1 + (s+p)^{n-2} b_2 + \cdots \right. \\
 & \quad \left. + (s+p)^2 b_{n-2} + (s+p) b_{n-1} + b_n \right]_{s=-p} \\
 &= \frac{d^{n-l-1}}{ds^{n-l-1}} \left[(n-1)(s+p)^{n-2} b_1 + (n-2)(s+p)^{n-3} b_2 + \cdots \right. \\
 & \quad \left. + 2(s+p) b_{n-2} + b_{n-1} \right]_{s=-p} \\
 & \quad \vdots \\
 &= (n-l)! b_{n-l}
 \end{aligned}$$

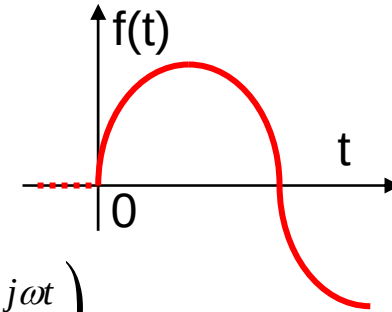
ラプラス逆変換

- 関数 $F(s)$ が重根を持つ場合

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] \\ &= L^{-1}\left[\frac{b_1}{s+p}\right] + L^{-1}\left[\frac{b_2}{(s+p)^2}\right] + \cdots + L^{-1}\left[\frac{b_n}{(s+p)^n}\right] \\ &= b_1 e^{-pt} + b_2 t e^{-pt} + \cdots + b_n t^{n-1} e^{-pt} \\ &= (b_1 + b_2 t + \cdots + b_n t^{n-1}) e^{-pt} \end{aligned}$$

ラプラス変換の諸性質

- 正弦波関数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin \omega t & 0 \leq t \end{cases}$
– オイラーの公式



$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt$$

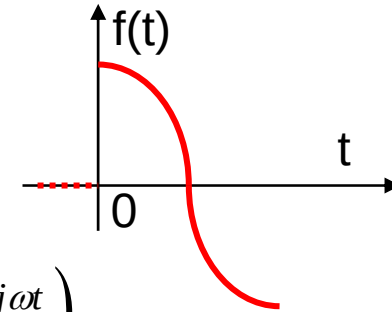
$$= \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{(j\omega-s)t} - e^{-(j\omega+s)t} dt$$

$$= \frac{A}{2j} \left[-\frac{1}{s-j\omega} e^{(j\omega-s)t} + \frac{1}{s+j\omega} e^{-(j\omega+s)t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

ラプラス変換の諸性質

- 余弦波関数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \cos \omega t & 0 \leq t \end{cases}$
 – オイラーの公式



$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{A}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-st} dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_0^{\infty} e^{(j\omega-s)t} + e^{-(j\omega+s)t} dt$$

$$= \frac{A}{2} \left[-\frac{1}{s-j\omega} e^{(j\omega-s)t} - \frac{1}{s+j\omega} e^{-(j\omega+s)t} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{A}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$