

制御工学I 第四回 ラプラス変換3

平成21年4月27日

線形時不変常微分方程式の求解例2

複素根を持つ場合

- 二次の微分方程式と初期値(1と初期値0)

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

– ラプラス変換 $L[x(t)] = X(s)$

$$L[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

$$L[\ddot{x}(t)] = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2 X(s)$$

$$L[3] = \frac{3}{s}$$

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

$$[s^2 + 2s + 5]X(s) = \frac{3}{s}$$

線形時不変常微分方程式の求解例2

- 部分分数展開 $X(s) = \frac{3}{s[s^2 + 2s + 5]}$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{5} \frac{1}{s} - \frac{3}{5} \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

- 逆変換

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{3}{5} \frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{3}{10} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{10} e^{-t} \sin 2t - \frac{3}{5} e^{-t} \cos 2t \end{aligned}$$

ラプラス変換の諸性質

- 遅延(時間推移) $f(t)1(t) \Rightarrow f(t-\alpha)1(t-\alpha)$

$$L[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = \int_0^{\infty} f(t-\alpha)1(t-\alpha)e^{-st} dt$$

— 変数変換 $\tau = t - \alpha \quad f(\tau) = 0, \tau < 0$

$$\int_0^{\infty} f(t-\alpha)1(t-\alpha)e^{-st} dt = \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau$$

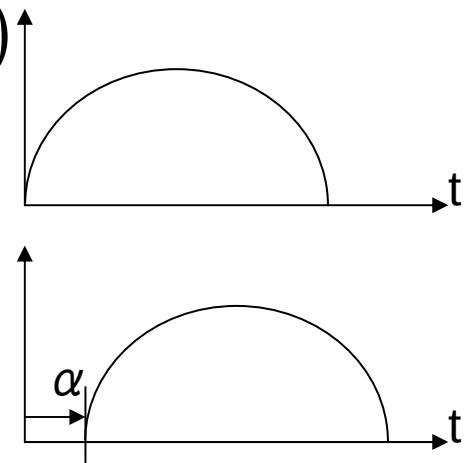
$$= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

時間のずれは,

ラプラス変換では

$e^{-s\alpha}$ 掛けるのと同じ

$$\Rightarrow e^{-s\alpha} F(s)$$



ラプラス変換の諸性質

- パルス関数 $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0, t_0 < t \end{cases}$

– ステップ関数の一種

- $t=0$ で A/t_0 が印加, $t=t_0$ で $-A/t_0$ を重畳

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L\left[\frac{A}{t_0} 1(t)\right] - L\left[\frac{A}{t_0} 1(t - t_0)\right] \\ &= \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0} = \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \end{aligned}$$

ラプラス変換の諸性質

- インパルス関数
– 幅が小さくなっても面積一定

$$g(t) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0, t_0 < t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L[g(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0 s} \left(1 - \left\{ 1 - st_0 + \frac{(-st_0)^2}{2!} + \frac{(-st_0)^3}{3!} + \dots \right\} \right) \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0 s} \left(st_0 - \frac{(-st_0)^2}{2!} - \frac{(-st_0)^3}{3!} - \dots \right) \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[A \left(1 + \frac{(-st_0)^1}{2!} + \frac{(-st_0)^2}{3!} + \dots \right) \right] = A \end{aligned}$$

ラプラス変換の諸性質

- 相似則

- 時間スケール変更

$$t \rightarrow \frac{t}{\alpha}$$

$$L\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} dt$$

- 変数変換 $\frac{t}{\alpha} = t_1, \alpha s = s_1$

$$L\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-s_1 t_1} d(\alpha t_1)$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-s_1 t_1} dt_1$$

$$= \alpha F(s_1)$$

ラプラス変換

- 初期値の法則

- ラプラス変換から $t=0+$ の初期値を求める

- 原関数 $f(t)$ と $df(t)/dt$ がラプラス変換可能な場合

$$L_+ \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(0+)$$

- $0+ \leq t \leq \infty$ において, $s \rightarrow \infty$ とすると $e^{-st} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0+)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} L_+ \left[\frac{df(t)}{dt} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0+)$$

ラプラス変換

- 最終値の法則

- 定常状態($t \rightarrow \infty$)値を求める

- 原関数 $f(t)$ が有限な値に収束する事が必要

- 次の性質を利用 $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] &= \lim_{s \rightarrow 0} L_+ \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = [f(t)]_0^{\infty} \\ &= f(\infty) - f(0)\end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$$

ラプラス変換

- 実積分の法則

- 原関数の積分 $\int f(t)dt$ のラプラス変換

- 部分積分 $L\left[\int f(t)dt\right] = \int_0^\infty \left[\int f(t)dt\right] e^{-st} dt$

$$= \left[\int f(t)dt \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$= \frac{1}{-s} \left[\int f(t)dt e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$$

$$f^{-1}(0) = \int f(t)dt \Big|_{t=0} \quad \text{とおく}$$

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

積分(微分の逆数)

ラプラス変換

- 複素微分の法則

- ラプラス変換関数の微分 $\frac{d}{ds}F(s)$

- 関数 $tf(t)$ のラプラス変換を考える

$$\begin{aligned}L[tf(t)] &= \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-st} dt \\&= - \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} [e^{-st}] dt = - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\&= - \frac{d}{ds} F(s)\end{aligned}$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ラプラス変換

- 畳み込み積分

- 制御や信号処理では, 入力信号に対する畳み込み積分が重用される。

- 画像のパターンマッチング
 - エコーキャンセラー

- 時間 τ 異なる畳み込み積分の性質

$$\begin{aligned}\xi = t - \tau \quad \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau &= - \int_t^0 f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi \\ &= - \int_t^0 f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\end{aligned}$$

ラプラス変換

- 畳み込み積分とラプラス変換

- ラプラス変換 $\left\{ \begin{array}{l} F_1(s) = L[f_1(t)] = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt \\ F_2(s) = L[f_2(t)] = \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \end{array} \right.$
 - 畳み込み積分

$$f_1(t-\tau) \mathbb{1}(t-\tau) = 0, t-\tau < 0 (\tau > t)$$

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau) \mathbb{1}(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] &= L\left[\int_0^{\infty} f_1(t-\tau) \mathbb{1}(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f_1(t-\tau) \mathbb{1}(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

ラプラス変換

- 畳み込み積分とラプラス変換

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau)e^{-st}dt\right]f_2(\tau)d\tau$$

$$t-\tau=\lambda \qquad =\int_0^\infty\left[\int_{-\tau}^\infty f_1(\lambda)\mathbf{1}(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda\right]f_2(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f_1(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda\right]f_2(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f_1(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda\right]f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$=F_1(s)F_2(s)$$