制御工学I
第五回
制御システムの
モデリングと伝達関数

平成21年5月11日

システムのダイナミクス

- システム
  - 電気，機械，熱，経済，生体などなど
- ダイナミクス
  - 微分方程式で表現
  - 数学モデル
- 因果律
  - 過去の入力は現在の出力に影響を及ぼす
  - 未来の入力は現在の出力に影響を及ぼさない

モデル化

- モデルに要求される性質
  - 簡素
    - 支配的でない物理的性質の省略
    - 非線形性の無視
    - 分布定数的性質の無視
  - 結果の妥当性
    - 線形集中定数モデル
      - 低周波では妥当
      - 高周波では？
- 線形システム
  - 重ね合わせの理が適用可能

線形時不変システムと
線形時変システム

- 線形時不変システム
  - 線形時不変の集中定数要素
  - 定係数の線形時不変微分方程式
    - 充電したコンデンサCの抵抗負荷Rに対する放電
    - バネにぶら下がったおもりの運動
- 線形時変システム
  - 係数が時間変化する微分方程式
    - ロケットのモデル(重量が燃料消費で変化)

伝達関数

- 線形時不変微分方程式で表される系
  - 入力x・出力yのラプラス変換X,Yの比
  - 初期値0を仮定

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

$$a_0 s^n Y + a_1 s^{n-1} Y + \cdots + a_{n-1} sY + a_n Y = b_0 s^m X + b_1 s^{m-1} X + \cdots + b_{m-1} sX + b_m X$$

  - 伝達関数
    - n次システム

$$(n \geq m)$$

$$G(s) = \left.\frac{L[\text{出力}]}{L[\text{入力}]}\right|_{\text{初期値}=0} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 sn^{m-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

伝達関数の特徴

- 入出力の関係を表す数学モデルである
- 入力の大きさや性質に依存しない
- 入出力の関係を表すが，システムの物理的構造を表すものではない
  - 電気・機械等異なる性質のものを表せる
- 入力から出力を推定できる
- 既知の入力に対して得られる出力より，伝達関数を推定する事ができる

畳み込み積分

- 線形時不変システムの伝達関数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

  – X(s):入力のラプラス変換
  – Y(s):出力のラプラス変換

$$Y(s)=G(s)X(s)$$

- 複素領域の積算は時間領域の畳み込み積分と等価

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  – ただしg(t)=0,x(t)=0 for t<0

インパルス応答

- 単位インパルス入力に対する出力(初期値0)
  - 単位インパルスのラプラス変換は1

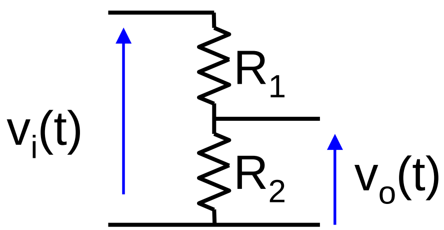
$$Y(s) = G(s)$$

- 伝達関数G(s)のラプラス逆変換
  →インパルス応答関数

$$L^{-1}\left[G(s)\right] = g(t)$$

伝達関数

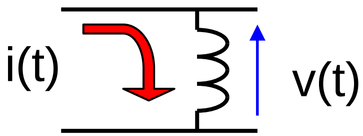
- 伝達関数
  - 比例要素



$$v_i(t):v_o(t)=R_1+R_2:R_2 \quad \Rightarrow \quad V_i(s):V_o(s)=R_1+R_2:R_2$$

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

  - 微分要素

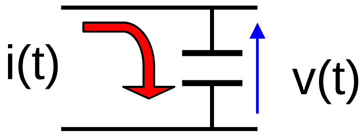


$$v(t)=L\frac{d}{dt}i(t) \quad \Rightarrow \quad V(s)=sLI(s)$$

$$G(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=sL$$

伝達関数

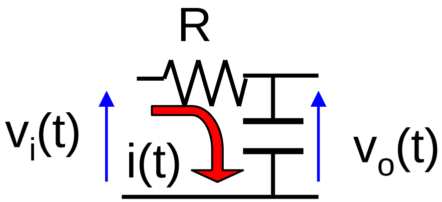
- 伝達関数
  - 積分要素



$$v(t)=\frac{1}{C}\int idt \quad\Rightarrow\quad V(s)=\frac{I(s)}{Cs}$$

$$G(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{1}{Cs}$$

  - 一次遅れ要素

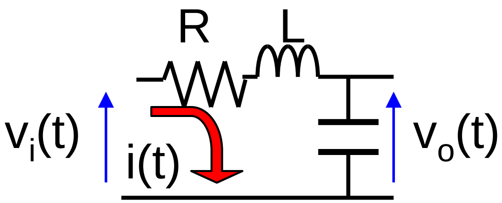


$$\begin{cases} v_i(t)=Ri+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int idt \\ v_o(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int idt \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} V_i(s)=RI(s)+\dfrac{I(s)}{sC} \\ V_o(s)=\dfrac{I(s)}{sC} \end{cases}$$

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{sCR+1}$$

伝達関数

- 伝達関数
  - 二次遅れ要素



$$\begin{cases} v_i(t) = Ri + L\dfrac{d}{dt}i + \dfrac{1}{C}\int idt \\ v_o(t) = \dfrac{1}{C}\int idt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_i(s) = RI(s) + sLI(s) + \dfrac{I(s)}{sC} \\ V_o(s) = \dfrac{I(s)}{sC} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

$$T = \sqrt{LC}$$

$$\xi = \tfrac{R}{2}\sqrt{\tfrac{C}{L}}$$

  - むだ時間

$$y(t) = u(t - \tau) \Rightarrow Y(s) = U(s)e^{-s\tau} \Rightarrow G(s) = e^{-s\tau}$$