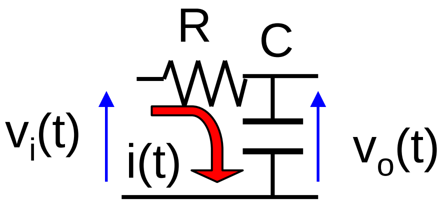
制御工学I　第7回
ブロック線図の残り
周波数特性

平成21年6月1日

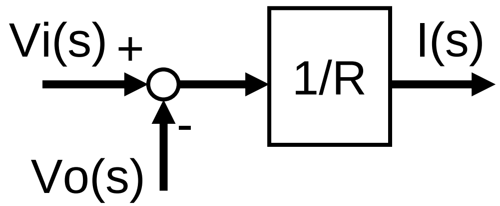
ブロック線図の作り方と伝達関数表現

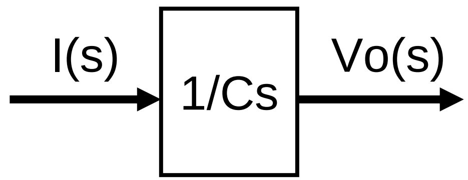
- RC回路の例

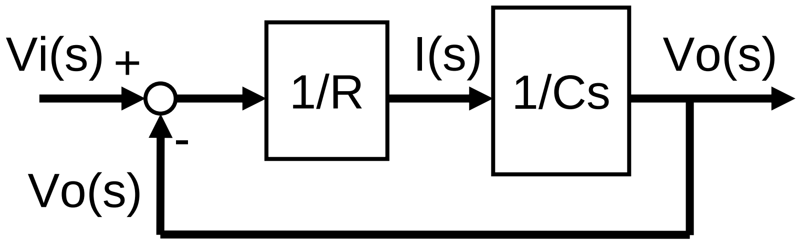


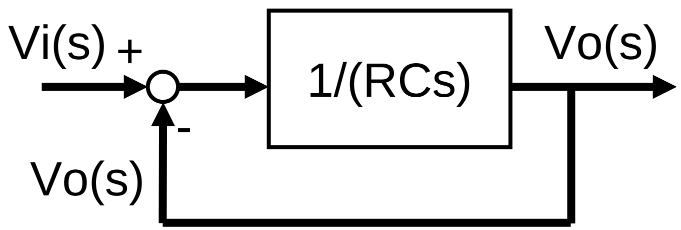
$$\begin{cases} v_i(t) = Ri(t) + v_0(t) \\ v_o(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_i(s) - V_0(s) = RI(s) \\ V_o(s) = \dfrac{I(s)}{sC} \end{cases}$$





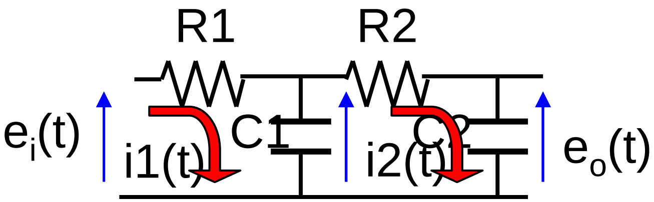




$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sCR}$$

電気回路の伝達関数表現例

- 直列接続された回路



$$
\begin{cases}
e_i(t) = R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt \\
\dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt = R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2 dt \\
e_o(t) = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
E_i(s) = R_1 I_1(s) + \dfrac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] \\
\dfrac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] = R_2 I_2(s) + \dfrac{1}{C_2 s} I_2(s) \\
E_o(s) = \dfrac{1}{C_2 s} I_2(s)
\end{cases}
$$

電気回路の伝達関数表現例

第3式 $I_2(s) = E_o(s) C_2 s$

第2式 $\frac{1}{C_1 s} I_1(s) = \left[\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right] I_2(s)$

$$I_1(s) = \left[1 + R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2} \right] I_2(s) = \left[1 + R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2} \right] E_o(s) C_2 s$$

$$= \left[C_2 s + R_2 C_1 C_2 s^2 + C_1 s \right] E_o(s)$$

$$= \left[R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2) s \right] E_o(s)$$

第1式に代入

$$E_i(s) = \left[R_1 + \frac{1}{C_1 s} \right] I_1(s) - \frac{1}{C_1 s} I_2(s)$$

$$= \left[R_1 + \frac{1}{C_1 s} \right] \left[R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2) s \right] E_o(s) - \frac{1}{C_1 s} E_o(s) C_2 s$$

$$= \frac{R_1 C_1 s + 1}{C_1 s} \left[R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2) s \right] E_o(s) - \frac{C_2}{C_1} E_o(s)$$

電気回路の伝達関数表現例

つづき

$$E_i(s)=\left\{\frac{R_1C_1s+1}{C_1}\left[R_2C_1C_2s+C_1+C_2\right]-\frac{C_2}{C_1}\right\}E_o(s)$$

$$=\left\{\left[R_1C_1s+1\right]\left[R_2C_2s+1\right]+\left[R_1C_1s+1\right]\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_2}{C_1}\right\}E_o(s)$$

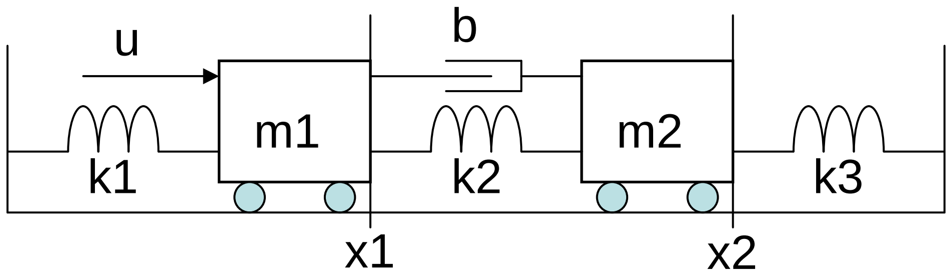
$$=\left\{\left[R_1C_1s+1\right]\left[R_2C_2s+1\right]+R_1C_2s\right\}E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

$$=\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

機械系の伝達関数表現例

- ばね質量系



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = b\dot{x}_2 + k_2x_2 + u \\ m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x}_1 + k_2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)\right]X_1(s) = (bs + k_2)X_2(s) + U(s) \\ \left[m_2s^2 + bs + (k_2 + k_3)\right]X_1(s) = (bs + k_2)X_1(s) \end{cases}$$

機械系の伝達関数表現例

- ばね質量系

$$
\left[\left(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2\right)\left(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3\right) - \left(bs + k_2\right)^2\right] X_1(s)
$$
$$
= \left(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3\right) U(s)
$$

$$
\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{\left(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2\right)\left(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3\right) - \left(bs + k_2\right)^2}
$$

$$
\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{\left(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2\right)\left(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3\right) - \left(bs + k_2\right)^2}
$$

周波数特性

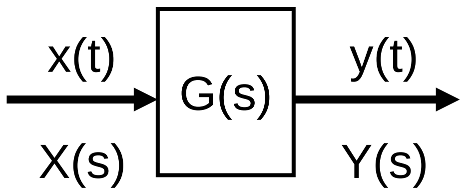
周波数応答

- 周波数応答とは
  - 正弦波入力に対する出力の定常状態
  - 周波数応答解析と根軌跡解析は対をなす
  - Nyquist, Bode, Nicholsら
  - ロバスト制御には不可欠
- 周波数応答の利点
  - 伝達関数の推定が可能

正弦波入力に対する定常状態出力1

- 安定な線形時不変システムに正弦波を入力した場合の出力を求める
  - 伝達関数G(s)

$$G(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{(s+b_1)(s+b_2)\cdots(s+b_m)}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}$$



  - 入力x(t) →正弦波信号

$$x(t)=A\sin\omega t$$
$$X(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

  - 出力y(t) →どんな？正弦波(振幅・位相は異なる)

正弦波入力に対する定常状態出力2

- ラプラス変換形式の入力X(s)と出力Y(s)

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{p(s)}{q(s)}X(s)$$

- 正弦波に対する伝達関数の定義
  - ラプラス演算子sをjωに置き換える

$$G(j\omega)=Me^{j\phi}=M\angle\phi$$

    - 入出力正弦波の振幅比:M,位相差:Φ

正弦波入力に対する定常状態出力3

- 安定な線形時不変システムの正弦波入力に対する応答の定常状態は，初期値に依存しない。
  - 初期値0と仮定して求める
    - 重根を持たない場合

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1'}{s+a_1} + \frac{b_2'}{s+a_2} + \cdots + \frac{b_n'}{s+a_n}$$

- ただし$a, b_1, b_2, \cdots, b_n$は定数

正弦波入力に対する定常状態出力4

- ラプラス逆変換による時間応答の解(t≧0)

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1'e^{-a_1 t} + b_2'e^{-a_2 t} + \cdots + b_n'e^{-a_n t}$$

  – 安定なシステムでは$-a_1, -a_2, \cdots, -a_n$の実部は負
    - $e^{-a_1 t}, e^{-a_2 t}, \cdots, e^{-a_n t}$ 各項はt→∞でゼロに収束
  – 最初の二項は収束しない
  – 重根を持つ場合
    - 重根Sjのmj重根→ $t^{h_j} e^{-s_j t} \left(h_j = 0,1,2,\cdots, m_j - 1\right)$
      – 安定なシステムでは $t^{h_j} e^{-s_j t}$ が収束する

正弦波入力に対する定常状態出力5

- 安定なシステムの定常状態の応答

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \overline{a}e^{j\omega t}$$

単根，重根に関係ない

– 部分分数の係数

$$a = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\bigg|_{s=-j\omega} = G(s)\frac{A\omega}{s-j\omega}\bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\overline{a} = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\bigg|_{s=j\omega} = G(s)\frac{A\omega}{s+j\omega}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

正弦波入力に対する定常状態出力6

- 周波数応答を振幅と位相に分けた表現
  - 正弦波伝達関数 $G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\phi}$
  - 位相

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{G(j\omega)\text{虚部}}{G(j\omega)\text{実部}}$$

  - 負の周波数に対する伝達関数

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

  - 部分分数の係数

$$a = -\frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j} \qquad \bar{a} = \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

正弦波入力に対する定常状態出力7

- 定常状態の出力

$$
\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} \\
&= -\frac{A\left|G(j\omega)\right| e^{-j\phi}}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{A\left|G(j\omega)\right| e^{j\phi}}{2j} e^{j\omega t} \\
&= A\left|G(j\omega)\right| \frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \\
&= A\left|G(j\omega)\right| \sin(\omega t + \phi) \\
&= Y \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

$$
Y = A\left|G(j\omega)\right|
$$

周波数応答特性の図的表現法

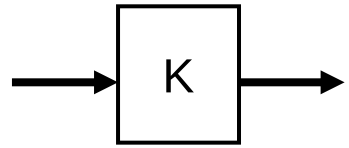
- 周波数をパラメータとした正弦波伝達関数の表現方法
  – ボード線図(対数表示)
  – ナイキスト線図(極座標表示)
  – ニコルス線図(振幅対数表示-位相)

ボード線図

- 二つのグラフで構成
  - 対数周波数に対する対数振幅(正弦波伝達関数)
    - 縦軸表現　$20\log\left|G\left(j\omega\right)\right|$
      - 単位はdB
  - 対数周波数に対する位相
- 利点
  - 振幅の乗算が加算で表される
  - 特性を直線近似して概算を求める事ができる

ボード線図
ゲインK

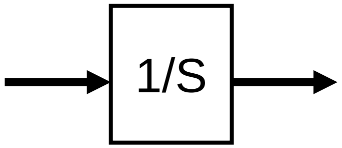
- ゲインKのボード線図上での扱い



  - 20logK
    - K>1に対して正
    - K<1に対して負
  - 振幅曲線を上下に移動
  - 位相曲線は不変
  - 10のn乗倍は$20\log(K10^n)=20\log K+20n$

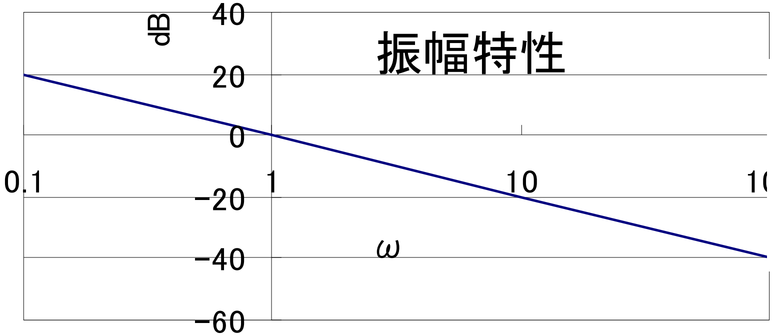
ボード線図
積分

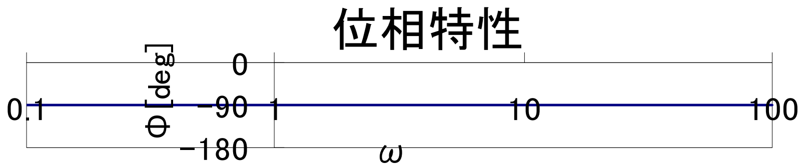
- 積分1/jωのボード線図上での扱い



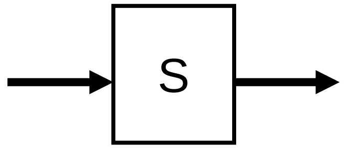
  – 振幅 $$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega dB$$

    - ボード線図上では直線
      – 周波数が10倍になると
      $$-20\log 10\omega[dB] = -20\log\omega - 20[dB]$$
      » -20dB/decade





ボード線図
微分



- 微分jωのボード線図上での扱い
  - 振幅 $20\log|j\omega| = 20\log\omega dB$
    - ボード線図上では直線
      - 周波数が10倍になると

$$20\log 10\omega[dB] = 20\log\omega + 20[dB]$$

» 20dB/decade

  - 位相→一定(90°)