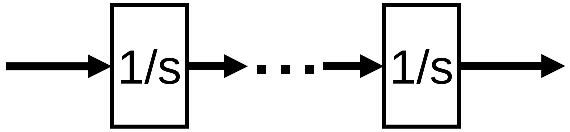
制御工学I　第8回
周波数特性
ボード線図

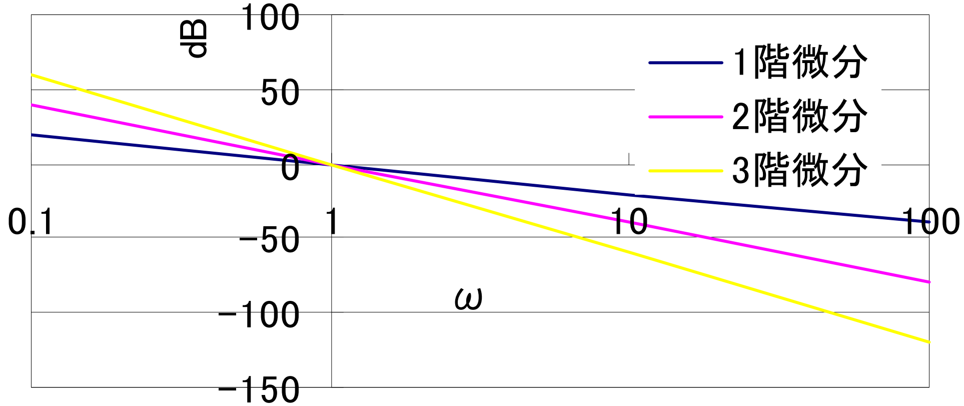
平成21年6月8日

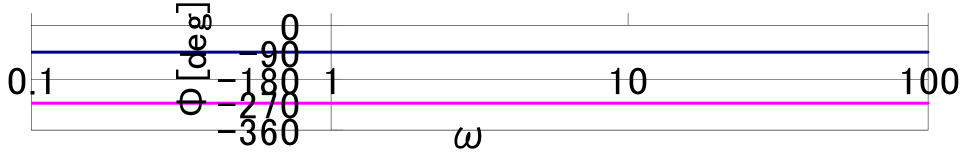
ボード線図
n段積分



- ボード線図
  - 振幅

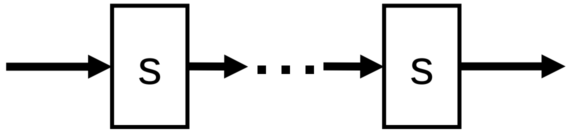
$$20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^n}\right| = -n20\log\omega dB$$





    - 微分の階数に比例して振幅の傾きが変化
  - 位相-90×n(deg)

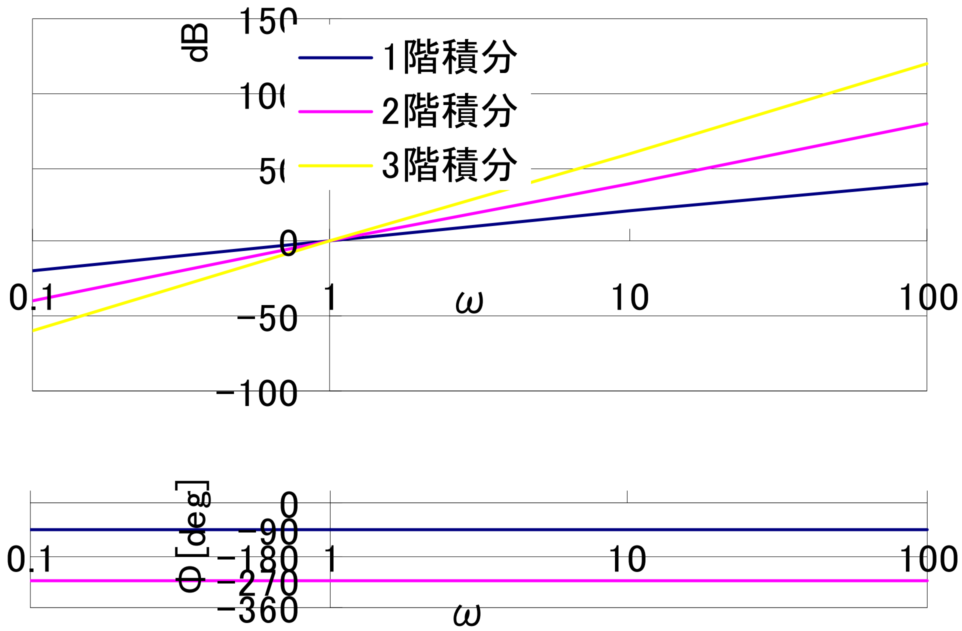
ボード線図
n段微分



- ボード線図
  - 振幅

$$20\log\left|(j\omega)^n\right| = n20\log\omega dB$$

    - 積分の階数に比例して振幅の傾きが変化
  - 位相90×n(deg)



ボード線図
一次のシステム1

- 一次のシステム $\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+sT}} \longrightarrow$ $\qquad \dfrac{1}{1+j\omega T}$

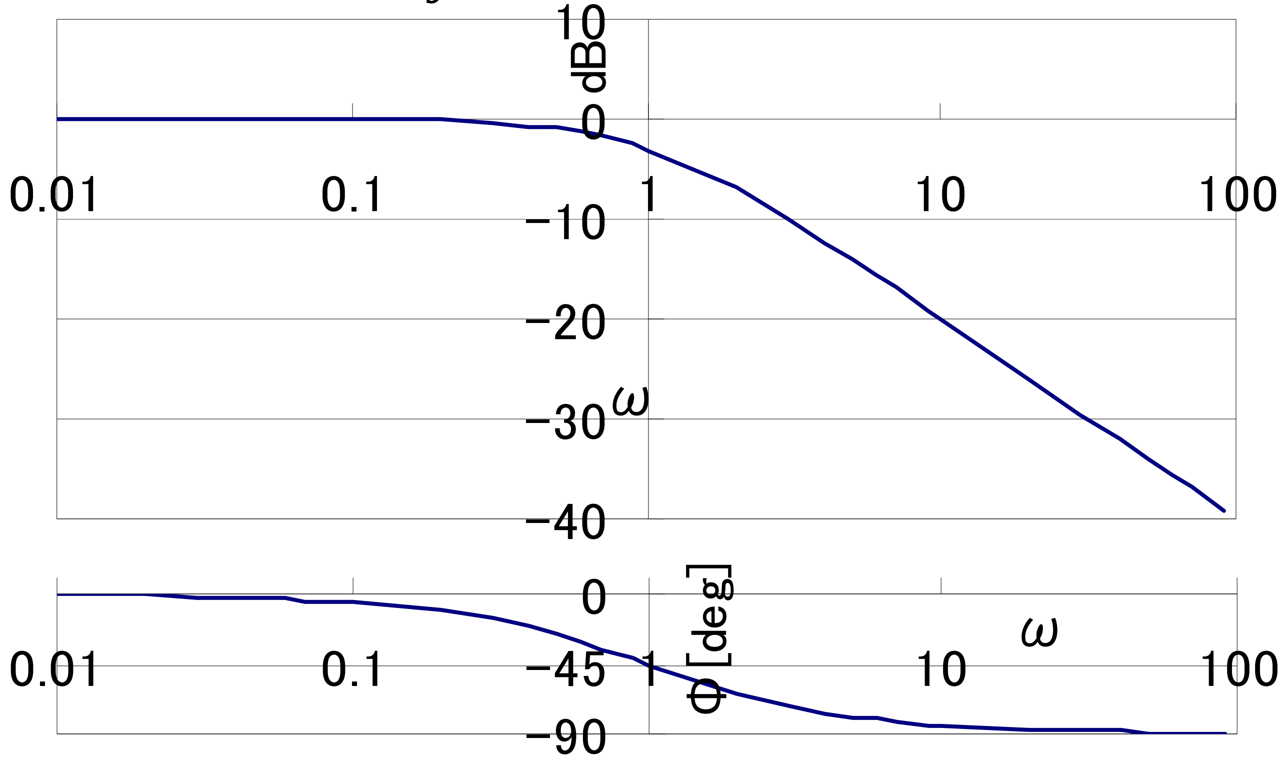
  – 振幅 $$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,dB$$

  – 位相 $$\frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\left|\dfrac{-j\omega T}{1+(\omega T)^2}\right|}{\left|\dfrac{1}{1+(\omega T)^2}\right|} = -\omega T \quad\Rightarrow\quad \phi = -\tan^{-1}\omega T$$

ボード線図
一次のシステム2

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$ LPF特性
  - 振幅
  - 位相



ボード線図
一次のシステム2

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の性質

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2}\,dB$$

    - 高周波(ω>>1/T→1<<ωT)

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong -20\log\omega T dB$$

      - -20dB/decade(周波数が一桁上がると振幅が20dB小さくなる)
        - » 0dB for ω=1/T
        - » -20dB for ω=10/T

ボード線図
一次のシステム2

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の性質

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2}\,dB$$

    - 低周波(ω<<1/T)→ $\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong 1$ ほぼ一定

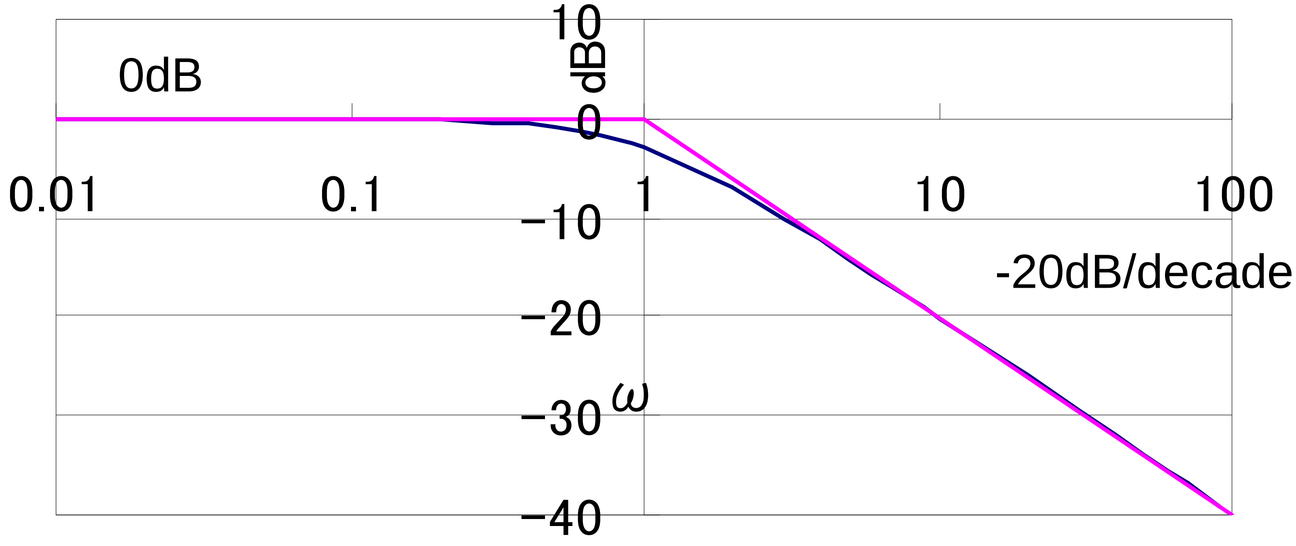
$$-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong -20\log 1 = 0dB$$

  - 振幅の近似線
    - 二つの直線で近似できる
      - 低周波領域0<ω<1/T→0dB
      - 高周波領域1/T<ω<∞→-20dB/decade

折点周波数ω=1/T
で交わる

ボード線図
一次のシステム3

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の近似線



ボード線図
一次のシステム4

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 位相の性質
    - 折点周波数を中心に奇対称(atan)

$$\phi = -\tan^{-1}\omega T$$

    - 直流0°
    - 折点周波数-45° $\phi = -\tan^{-1}\dfrac{\omega T}{\omega T} = -\tan^{-1}1 = -45^\circ$
    - ∞→-90°

ボード線図
一次のシステム5

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の近似線の誤差
    - 最大値→折点周波数

$$-20\log\sqrt{1+1}+20\log 1=-\frac{20}{2}\log 2+0=-3.03dB$$

    - 1オクターブ下

$$-20\log\sqrt{1/4+1}+20\log 1=-20\log\frac{\sqrt{5}}{2}=-0.97dB$$

    - 1オクターブ上

$$-20\log\sqrt{4+1}+20\log 2=-20\log\frac{\sqrt{5}}{2}=-0.97dB$$

ボード線図
一次のシステム6

- 一次のシステムの扱い $\longrightarrow \boxed{1+sT} \longrightarrow \quad 1+j\omega T$
  - 振幅→符号反転

$$20\log\left|1+j\omega T\right| = -20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|$$

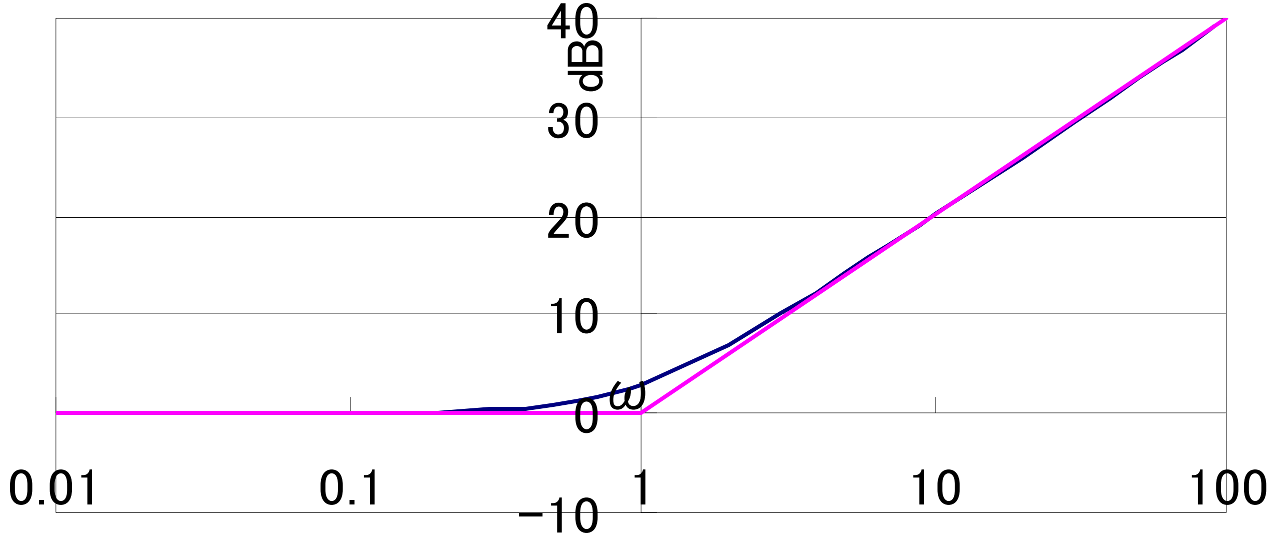
  - 位相→符号反転

$$\angle 1+j\omega T = \tan^{-1}\omega T = -\angle\frac{1}{1+j\omega T}$$

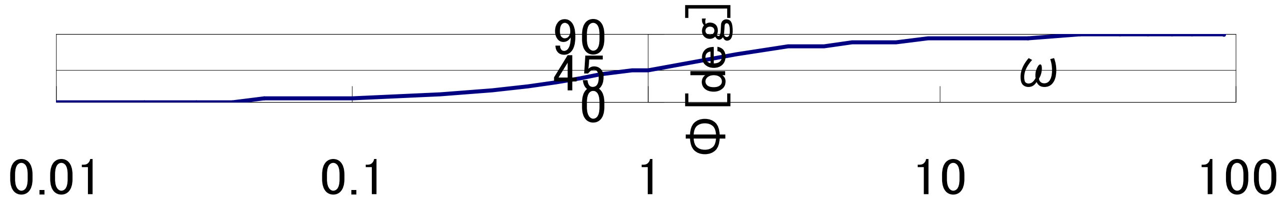
ボード線図は上下反転

ボード線図
一次のシステム6

- 一次のシステムの扱い　$1+j\omega T$　HPF特性



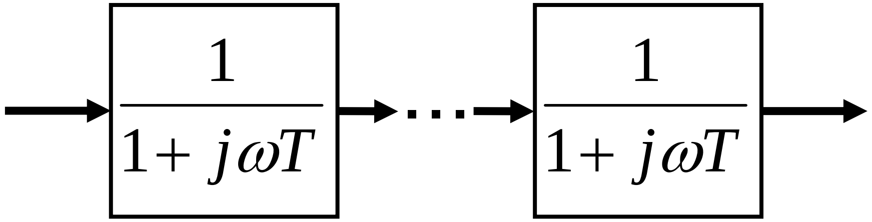
位相84.3°　ω=10/T
位相63.4°　ω=2/T
位相45°　ω=1/T
位相26.6°　ω=1/2T
位相5.7°　ω=1/10T



ボード線図は上下反転

ボード線図
一次のシステム7

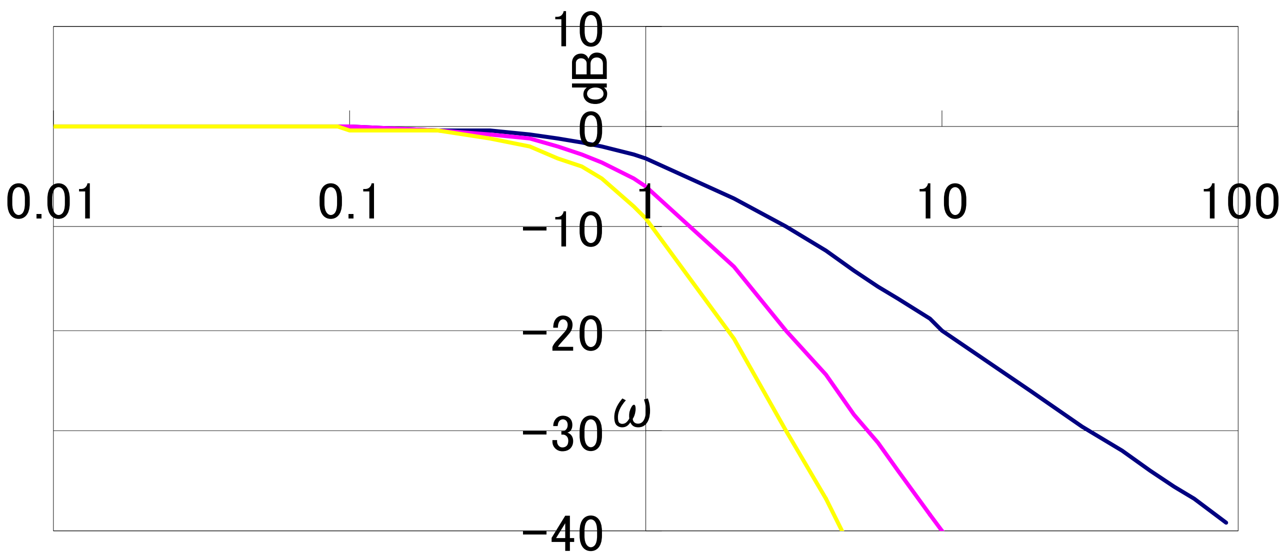
- 一次のシステムn段

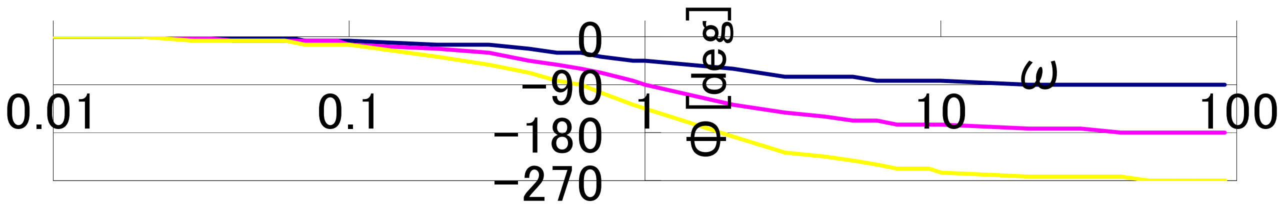


  - n倍

$$\left(\frac{1}{1+j\omega T}\right)^n$$

一次のシステムのn乗は，加算で表される





ボード線図
二次のシステム1

$$\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+2\zeta\dfrac{1}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n{}^2}s^2}} \longrightarrow$$

- 二次のシステム

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

  - 減衰比ζ
  - 共振周波数ω=ω$_n$
  - 判別式(減衰比ζ)

$$\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)^2-4\frac{1}{\omega_n{}^2}=\left(\frac{2}{\omega_n}\right)^2\left(\zeta^2-1\right)$$

    - ζ>1:実根を持つ一次システム×2
    - 0<ζ<1:共役複素根を持つ

ボード線図
二次のシステム2

- 二次のシステム $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$
  - 振幅

$$20\log\left|\frac{1}{1+2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right|=-20\log\left|1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|$$

$$=-20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\ \mathrm{dB}$$

ボード線図
二次のシステム2

- 二次のシステム

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}$$

ボード線図
二次のシステム3

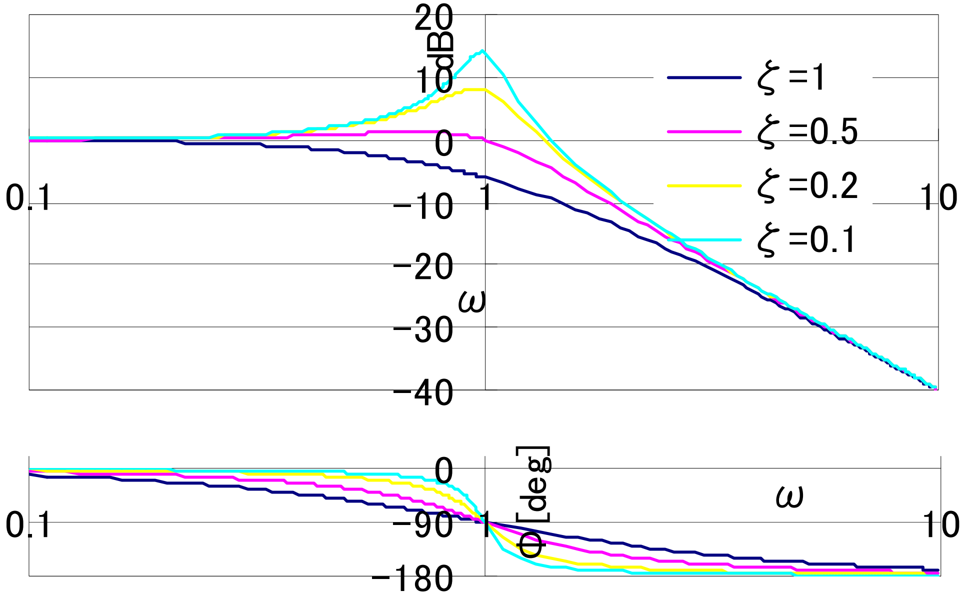
- 二次のシステム
  - 位相

$$\phi = \angle \frac{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}$$

$$= -\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ボード線図
二次のシステム4

- 二次のシステム
  - ボード線図
    - ξが小さいとピークを持つ



ボード線図
二次のシステム

- 振幅の近似線
  - 減衰比ζを無視
    - 高周波領域$\omega >> \omega_n$($1 >> \omega / \omega_n$)

$$-20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cong -20\log\sqrt{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2}$$

$$= -20\log\left(\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right) = -40\log\frac{\omega}{\omega_n}\,\mathrm{dB}$$

- 高周波領域近似線
  - 傾き-40dB/decade

$$-40\log\frac{10\omega}{\omega_n} = -40\left(\log 10 + \log\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ボード線図
二次のシステム

- 振幅の近似曲線
  - 減衰比ζを無視
    - 低周波領域$\omega << \omega_n (1 >> \omega / \omega_n)$
      - 0dBの水平線

$$-20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cong -20\log 1 = 0\mathrm{dB}$$

    - 交点(折点周波数)
      - $\omega / \omega_n = 1$→共振点$\omega = \omega_n$
    - 減衰比ζで共振点でのピーク値が変わる
      - 近似値0dB
      - 減衰比ζが小さいと，ピークが大きくなり，近似からの乖離大

ボード線図 二次のシステム

- 位相の特性
  - 周波数ωと減衰比ξに依存
    - 直流ω=0
      - 位相0°
    - 折点周波数ω=ω$_n$

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1}\frac{2\zeta}{0} = -90^\circ$$

    - 高周波ω=∞

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1}\frac{1}{\infty} = -180^\circ$$