制御工学I　第9回
周波数特性
ボード線図
ナイキスト線図

平成21年6月15日

ボード線図
二次のシステム

- 二次のシステムの共振周波数とピーク値
  - 二次のシステム $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$
    - 振幅

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

ボード線図
二次のシステム

- 振幅の極大値
  - 振幅式分母の二乗の極小値

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}$$

$$= 1 - 2\left(1 - 2\zeta^2\right)\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2$$

ボード線図
二次のシステム

- 振幅の極大値

$$g(\omega) = 1 - \left(1 - 2\zeta^2\right)^2 + \left(1 - 2\zeta^2\right)^2 - 2\left(1 - 2\zeta^2\right)\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2$$

$$= 1 - \left(1 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4\right)\left[\left(1 - 2\zeta^2\right) - \frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right]^2$$

$$= 4\zeta^2\left(1 - \zeta^2\right) + \left[\frac{\omega_n{}^2\left(1 - 2\zeta^2\right) - \omega^2}{\omega_n{}^2}\right]^2$$

ボード線図
二次のシステム

– 極値をとる条件

$$\left[\frac{\omega^2 - \omega_n{}^2\left(1-2\zeta^2\right)}{\omega_n{}^2}\right]^2 = 0$$

– 共振周波数 ω_r

$$\omega_r{}^2 - \omega_n{}^2\left(1-2\zeta^2\right) = 0$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

ただし $1-2\zeta^2 \geq 0 \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$

– 分母の極値

$$g\left(\omega_r\right) = 4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)$$

ボード線図
二次のシステム

– 減衰比ζが零に近づくと，共振周波数はω_nに近づく
– 減衰比ζ>0.707では共振ピークを持たない
  » 周波数が高くなるに従い振幅減少(単調減少)
  » 振幅Mは1(0dB)以下

- 減衰比 $0 \le \zeta \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ でのピーク振幅Mr

$$M_r = \left|G(j\omega)\right|_{\max} = \left|G(j\omega_r)\right| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ボード線図
二次のシステム

– 共振周波数での位相

$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega_r}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= -\tan^{-1}\frac{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}{1-\left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)^2} = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}{1-\left(1-2\zeta^2\right)}$$

ボード線図
二次のシステム

– 共振周波数での位相

$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}{2\zeta^2} = -\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta}$$

$$= -90^\circ + \arcsin\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ボード線図
二次のシステム

- 二次のシステム

$$\longrightarrow \boxed{1+2\zeta\frac{1}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^{\ 2}}s^2} \longrightarrow$$

$$1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

  – 符号を反転
    - 振幅(対数)
    - 位相

$$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ボード線図の書き方

- 伝達関数 $G(s)=\dfrac{10s+30}{s^4+3s^3+3s^2+4s}=\dfrac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

- 周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+2)\left((j\omega)^2+j\omega+2\right)}$$

$$=\frac{10\left(1+\dfrac{j\omega}{3}\right)3}{j\omega\left(1+\dfrac{j\omega}{2}\right)2\left(1+\dfrac{j\omega}{2}+\dfrac{(j\omega)^2}{2}\right)2}=\frac{7.5\left(1+\dfrac{j\omega}{3}\right)}{j\omega\left(1+\dfrac{j\omega}{2}\right)\left(1+\dfrac{j\omega}{2}+\dfrac{(j\omega)^2}{2}\right)}$$

ボード線図の書き方

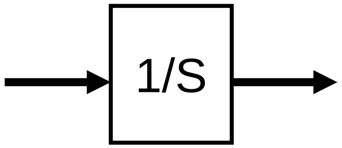
- 周波数伝達関数の構成要素と振幅
  - 7.5 水平直線:20log7.5
  - $(j\omega)^{-1}$ 直線:傾き-20dB/dec(0dB@ω=1)
  - $1+\frac{j\omega}{3}$ 近似直線:0dB,折点ω=3,傾き20dB/dec
  - $\left(1+\frac{j\omega}{2}\right)^{-1}$ 近似直線:0dB,折点ω=2,傾き-20dB/dec
  - $\left(1+\frac{j\omega}{2}+\frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1}$ 近似直線:減衰係数ζ=0.3536
    0dB,折点ω=√2,傾き-40dB/dec

これらを全て足す

ベクトル軌跡

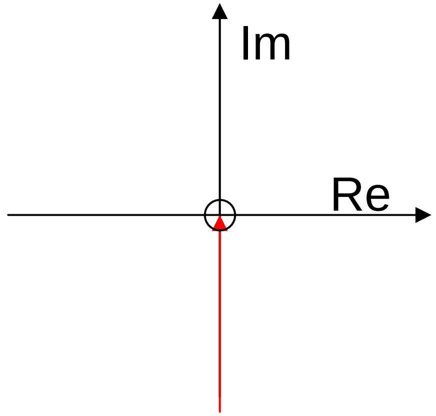
- 周波数伝達関数G(jω)の極座標表示
  - 振幅，位相角
  - 周波数を除く
- ナイキスト(Nyquist)線図
  - 複素平面表示
  - 周波数ωを0→∞

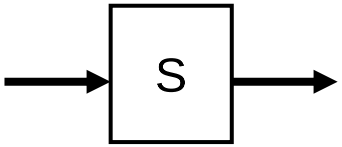
ナイキスト線図1

- 積分要素 

  - 虚軸・負の部分

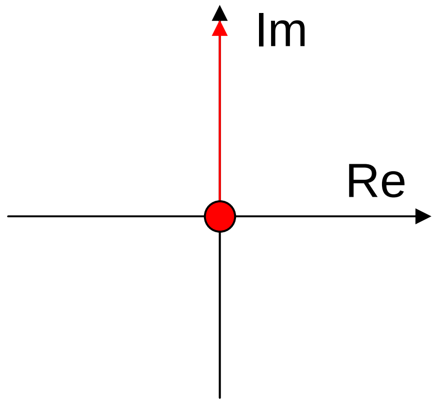
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90^\circ$$



- 微分要素 

  - 虚軸・正の部分

$$G(j\omega) = j\omega = \omega\angle 90^\circ$$



ナイキスト線図2

- 一次システム $\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+sT}} \longrightarrow$ $\dfrac{1}{1+j\omega T}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle -\arctan\omega T$$

  – 実・虚成分に分離

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)}=\frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}=X+jY$$

$$X=\frac{1}{1+\omega^2T^2}$$

$$Y=\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

ナイキスト線図

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\left(\frac{1}{1+\omega^2T^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2-\left(1+\omega^2T^2\right)}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2+\left(\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-\omega^2T^2}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2+\left(\frac{-2\omega T}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2\left(1-2\omega^2T^2+\left(\omega^2T^2\right)^2+4\omega^2T^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2\left(1+2\omega^2T^2+\left(\omega^2T^2\right)^2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ナイキスト線図3

– 実・虚成分に分離

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\left(\frac{1}{2}\frac{1-\omega^2T^2}{1+\omega^2T^2}\right)^2+\left(\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

» 中心(0.5,0)半径0.5

» 下半円 $0\le\omega\le\infty$ 上半円 $-\infty\le\omega\le 0$

» 周波数を0→無限大

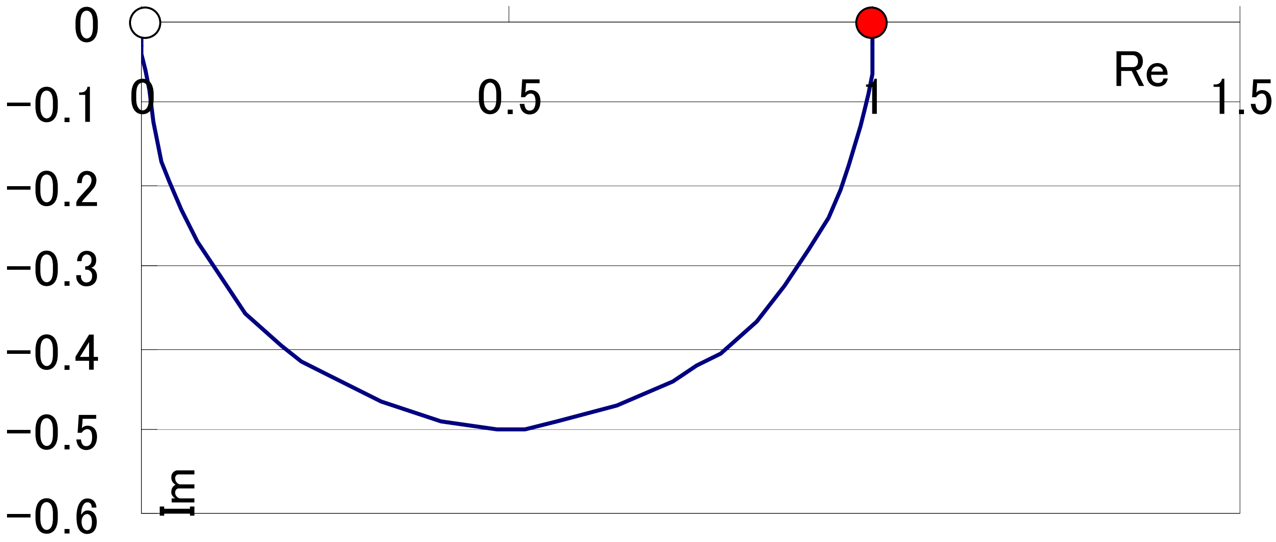
$$G(j0)=1\angle 0^\circ$$

$$G\left(j\frac{1}{T}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle-\arctan 1=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$$

$$G(j\infty)=0\angle-\arctan\infty=0\angle-90^\circ$$

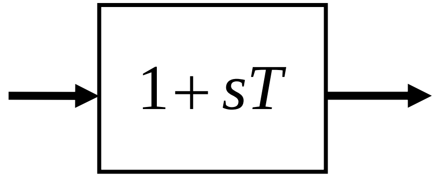
ナイキスト線図4

- 一次システム
  - 周波数0→無限大
    - 半円となる



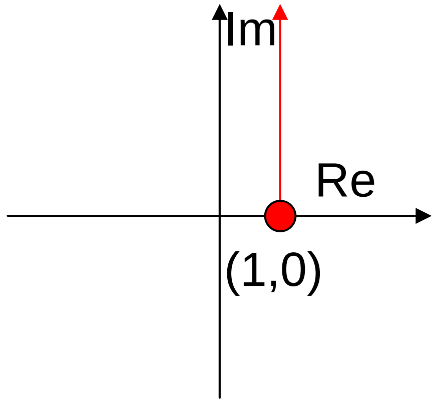
ナイキスト線図3

– 一次システム



$$G(j\omega)=1+j\omega T$$

- (1,0)を通る虚軸に平行な直線



$$G(j\omega)=1+j\omega T$$

完全に異なる

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$$

ボード線図では符号が反転しただけだったのとは大きな違い

ナイキスト線図4

- 二次システム
  - 但し減衰比ζ>0
    - 実･虚成分に分離

$$\frac{1}{1+2\zeta\frac{1}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n{}^2}s^2}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$G(j\omega)=X+jY$$

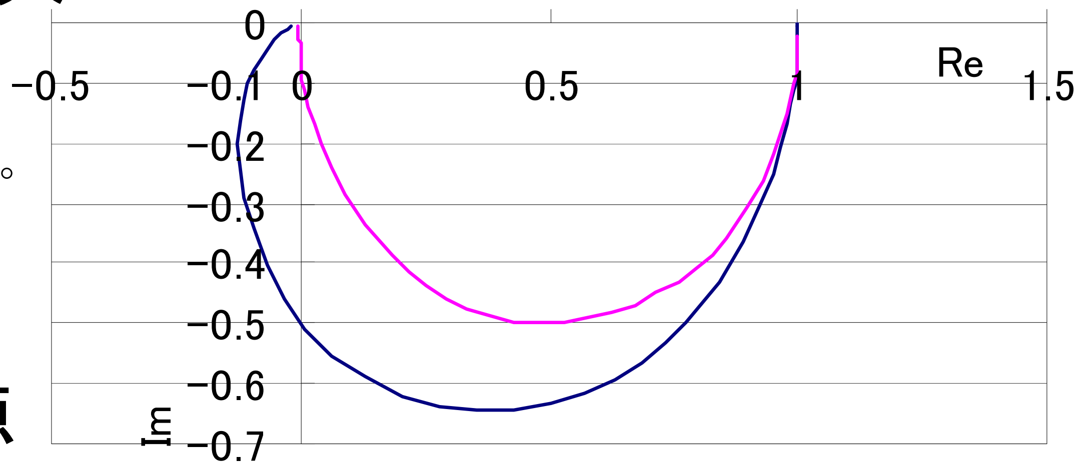
$$X=\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\qquad Y=\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ナイキスト線図5

- 周波数を0→無限大

$$G(j0)=1\angle 0^\circ$$

$$G(j\infty)=0\angle -180^\circ$$



- 減衰比0<ζ<1
  - 軌跡と虚軸の交点 ω=ωn
- 減衰比1<ζ(過制動)
  - 軌跡は半円に近づく
    - 一次のシステムに近い

ナイキスト線図5

- 二次システム

$$\longrightarrow \boxed{1+2\zeta\frac{1}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^{\ 2}}s^2} \longrightarrow$$

$$G(j\omega)=1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$