

制御工学I 第10回
安定性
ラウス, フルビッツの安定判別

平成22年6月21日

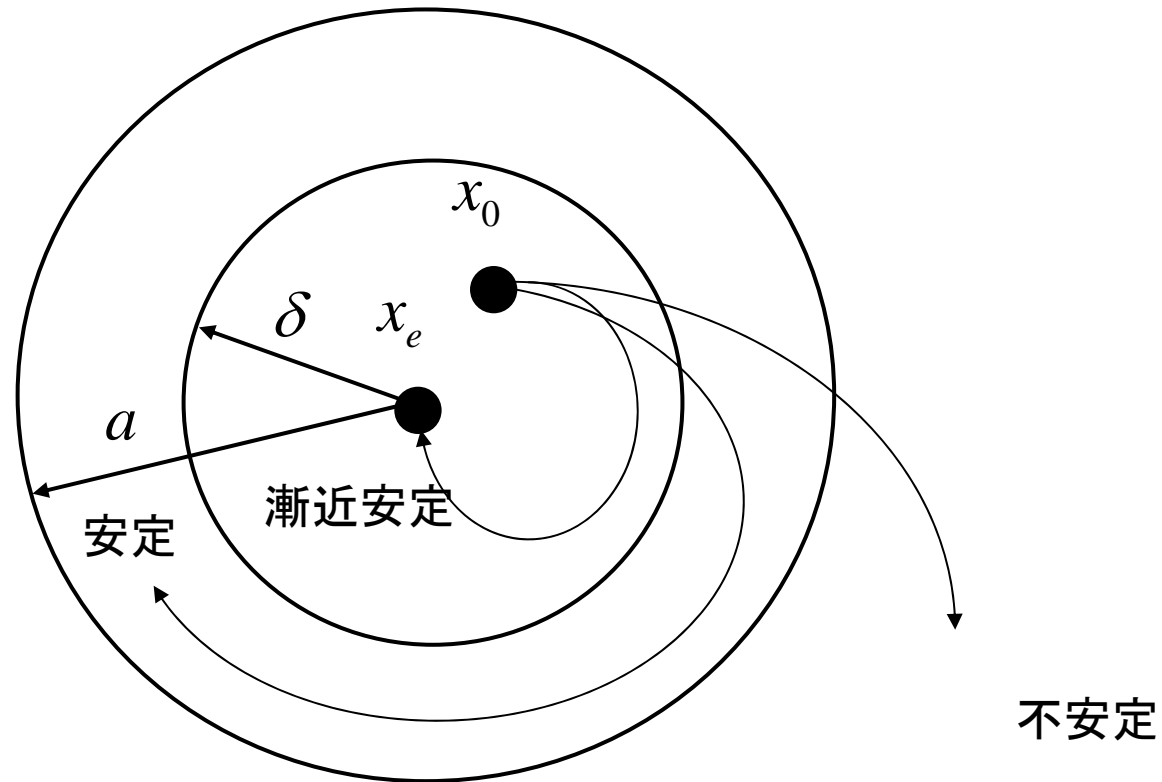
授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

リアプノフ安定性

- $\dot{x} = 0$ (微分量が0)とする状態 $x_e \rightarrow$ 平衡状態
 - x_e 平衡点
- 平衡点に摂動を与えた系の解 $x(t, x_0, t_0)$ の時間経過を考える。ただし, x_0, t_0 は初期値。
- 定義 $\|x_0 - x\| \leq \delta$ ならば, 全ての $t \geq t_0$ に対して $\|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \leq a$ となるような実数 a が存在すれば, 平衡点 x_e は安定。存在しなければ不安定。
 - 平衡点 x_e が安定かつ, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$ のとき x_e は漸近安定。

漸近安定



内部安定性

- 零入力応答 $x(t) = x_0 e^{kt}$
 - 入力が零で, 初期条件のみに対する応答
 - 初期状態 $x(0) = x_0$
- 内部安定(漸近安定:リアプノフの安定性)
 - どのような初期状態 x_0 に対しても,
 $t \rightarrow \infty$ で $x(t) = 0$ となる
- システムが内部安定となる必要十分条件
 - 特性方程式の根の実部が全て負 \Leftrightarrow 漸近安定

外部安定性

- 零状態応答

- 初期状態が零で, 入力のみに対する応答

- 有界な入力 $u(t)$ に対する零状態応答

- 有界な入力とは, 下式に適切な正数 k_1 が存在する

$$|u(t)| \leq k_1 < \infty, 0 \leq t < \infty$$

- システムが外部安定・入出力安定・有界入力有界出力(BIBO:Bounded Input Bounded Output)安定

- 有界な出力とは, 下式において適切な正数 k_2 が存在する

- 有界な入力 $u(t)$ に対して k_2 が存在する場合BIBO安定

$$|y(t)| \leq k_2 < \infty, 0 \leq t < \infty$$

BIBO安定

- システムのBIBO安定と等価な条件
 - 伝達関数の全ての極(特性方程式の根)が負の実部を持つ。 → 漸近安定
 - インパルス応答 $g(t)$ に対して, 次式を満たす正数 k が存在

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq k < \infty$$

- 有界入力 $u(t)$ に対する出力の応答

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau$$

$$\leq k_1 \int_0^t |g(t-\tau)| d\tau \leq k_1 k < \infty$$

任意の t に対して有界

BIBO安定

- インパルス応答 $g(t)$ が有界でない場合
 - 有界な入力 $u(\tau)$

$$\begin{cases} u(\tau) = 1 & \text{for } g(t-\tau) \geq 0 \\ u(\tau) = -1 & \text{for } g(t-\tau) < 0 \end{cases}$$

- 出力 $y(t)$ は有界ではない

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t |g(t-\tau)|d\tau$$

- 変数変換が $\sigma = t - \tau$ $d\sigma = -d\tau$

$$y(t) = \int_{-t}^0 |g(\sigma)| - d\sigma = \int_0^t |g(\sigma)| d\sigma$$

制御システムの安定性判別方法 (特性方程式の根を調べる方法)

- 特性方程式の特性根を求めて調べる
 - 特性方程式を解く
 - 根軌跡による方法
- 特性方程式の係数を用いて調べる
 - ラウス-フルビッツの方法
- ベクトル軌跡による方法
 - ナイキストの方法
- ボード線図を用いた方法
 - ゲイン余裕, 位相余裕

特性方程式の係数を用いた 安定判別法

- 伝達関数の特性方程式の根の実部
 - 高次の代数方程式の求解は困難
 - 根の実部の正負判別で十分
 - 代数方程式を解かないで安定判別
- 特性方程式の解(因数分解)

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n \\ &= \prod_{j=1}^{n-2\mu} (s + p_j) \prod_{i=1}^{\mu} \left\{ (s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2 \right\} \end{aligned}$$

– p_i : 実数根, σ_i : 複素根実部, ω_i : 複素根虚部

特性方程式の係数を用いた 安定判別法

- 全ての根の実部が負

$$p_j > 0 (j = 1 \cdots n - 2\mu), \sigma_i > 0 (i = 1 \cdots \mu)$$

$$0 = \prod_{j=1}^{n-2\mu} (s + p_j) \prod_{i=1}^{\mu} \left\{ (s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2 \right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2\mu} (s + p_j) \prod_{i=1}^{\mu} \left\{ s^2 + 2s\sigma_i + \sigma_i^2 + \omega_i^2 \right\}$$

- s^k の係数は全て正 $p_j > 0, 2\sigma_i > 0, \sigma_i^2 + \omega_i^2 > 0$

– 全ての根の実部が負となる必要条件

$$a_k > 0 (k = 0 \cdots n - 1)$$

十分条件は？

ラウスの安定判別法

- 特性多項式の係数からラウス表を作成

$$a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

– 係数を変換

$$\begin{cases} \alpha_0^0 = 1 \\ \alpha_1^0 = a_{n-2} \\ \alpha_2^0 = a_{n-4} \\ \vdots \end{cases} \begin{cases} \alpha_1^1 = a_{n-1} \\ \alpha_2^1 = a_{n-3} \\ \alpha_3^1 = a_{n-5} \\ \vdots \end{cases}$$

– 変換した係数の変換

$$\alpha_i^{k+2} = \frac{\alpha_0^{k+1} \alpha_{i+1}^k - \alpha_0^k \alpha_{i+1}^{k+1}}{\alpha_0^{k+1}} = \alpha_{i+1}^k + \gamma_{k+1} \alpha_{i+1}^{k+1}$$

2010/6/21

ただし $\gamma_{k+1} = \frac{\alpha_0^k}{\alpha_0^{k+1}}, \alpha_0^0 = 1$

ラウスの安定判別法

- ラウス表

$$\begin{array}{l|ccccccc}
 s^n & \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \cdots & \alpha_{m-2}^0 & \alpha_{m-1}^0 & \alpha_m^0 \\
 s^{n-1} & \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_{m-2}^1 & \alpha_{m-1}^1 & \\
 s^{n-2} & \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{m-2}^2 & \alpha_{m-1}^2 & \\
 s^{n-3} & \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \cdots & \alpha_{m-2}^3 & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
 s^2 & \alpha_0^{n-2} & \alpha_1^{n-2} & & & & & \\
 s^1 & \alpha_0^{n-1} & & & & & & \\
 s^0 & \alpha_0^n & & & & & &
 \end{array}$$

– 安定判別法(根の実部が全て負となる必要十分条件)

$$\alpha_0^i > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{または} \quad \gamma_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$$

フルビッツの安定判別法

- 特性多項式の係数からフルビッツ行列を作成

- nxn行列

- 要素 a_{n-1} より始める

- 一つ右に移る毎に
係数を2減らす
- 一つ下に移る毎に
係数を1増やす
- $a_n=1$
- $a_k=0$ $k>n$ or $k<0$

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ & 1 & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ & 0 & a_{n-1} & & 0 \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

フルビッツの安定判別法

- フルビッツ行列

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_0 & \cdots & 0 \\ & a_n & a_{n-2} & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ & 0 & a_{n-1} & & a_{n-3} & a_{n-8} & \cdots & 0 \\ & & a_n & & a_{n-2} & a_{n-6} & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & a_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

フルビッツの安定判別法

- フルビッツ行列式の作成

- 左上 $k \times k$ 小行列の行列式 $\Delta_k (k=1, 2, \dots, n)$
(主座小行列式)

$$\Delta_1 = a_{n-1} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{bmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} \quad \Delta_n = \det H$$

- 安定判別法

- 特性方程式の根の実部が全て負となる

$$\Delta_k > 0$$

ラウス法とフルビッツ法の等価性

- フルビッツ行列のラウス配列要素表示

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\ & 1 & a_{n-2} & \cdots \\ & 0 & a_{n-1} & \cdots \\ & & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\ 0 & a_0^1 & a_1^1 & \cdots \\ & a_0^0 & a_1^0 & \cdots \\ & 0 & a_0^1 & \cdots \\ & & a_0^0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ラウス法とフルビッツ法の等価性

- フルビッツ行列に係数行列をかける

$$H_1 = \Gamma_1 H = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ a_0^0 - \gamma_1 a_0^1 & a_1^1 - \gamma_1 a_1^1 & a_2^0 - \gamma_1 a_2^1 & \cdots \\ & a_0^1 & a_2^1 & \cdots \\ & a_0^1 - \gamma_1 a_0^1 & a_1^0 - \gamma_1 a_1^1 & \cdots \\ & & a_0^1 & \cdots \\ & & a_0^0 - \gamma_1 a_0^1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ 0 & a_0^2 & a_1^2 & \cdots \\ & a_0^1 & a_1^1 & \cdots \\ & 0 & a_0^2 & \cdots \\ & & a_0^1 & \cdots \\ & & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ラウス法とフルビッツ法の等価性

- 係数行列2をつくる

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & -\gamma_2 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & -\gamma_2 & 1 & & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

ラウス法とフルビッツ法の等価性

- フルビッツ行列に係数行列をかける

$$H_2 = \Gamma_2 H_1 = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ 0 & a_0^2 & a_1^2 & \cdots \\ & 0 & a_1^1 - \gamma_2 a_1^2 & \cdots \\ & & a_0^2 & \cdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ 0 & a_0^2 & a_1^2 & \cdots \\ & 0 & a_0^3 & \cdots \\ & & a_0^2 & \cdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

ラウス法とフルビッツ法の等価性

- 変形フルビッツ行列 $\tilde{H} = \Gamma_n H_{n-1} = \Gamma_n \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_1 H$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_{n-1}^1 \\ & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-2}^2 \\ & & a_0^3 & a_1^3 & \cdots & a_{n-3}^3 \\ & & & a_0^4 & \cdots & a_{n-3}^4 \\ & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & & & & & a_0^n \end{bmatrix}$$

- \tilde{H} の左上 $k \times k$ 小行列の行列式(主座小行列式)

$$\tilde{\Delta}_k = a_0^1 a_0^2 \cdots a_0^k, k = 1, 2, \dots, n$$

ラウス法とフルビッツ法の等価性

- 係数行列について

- Γ_k は下三角行列, 対角要素は全て1

- $\tilde{\Gamma}_n = \Gamma_n \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_1$ も対角要素が全て1の下三角行列

$$\tilde{\Delta}_k = \det(\tilde{H} \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列})$$

$$= \det(\tilde{\Gamma} H \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列})$$

$$= \det\left\{ \left(\tilde{\Gamma} \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列} \right) \times \left(H \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列} \right) \right\}$$

$$= \det(\tilde{\Gamma} \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列}) \det(H \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列})$$

$$= 1(H \text{の左上 } k \times k \text{ 小行列}) = \Delta_k$$

$$\Delta_k = a_0^1 a_0^2 \cdots a_0^k, k = 1, 2, \dots, n$$

$$a_0^k > 0, k = 1, 2, \dots, n$$



$$\Delta^k > 0, k = 1, 2, \dots, n$$

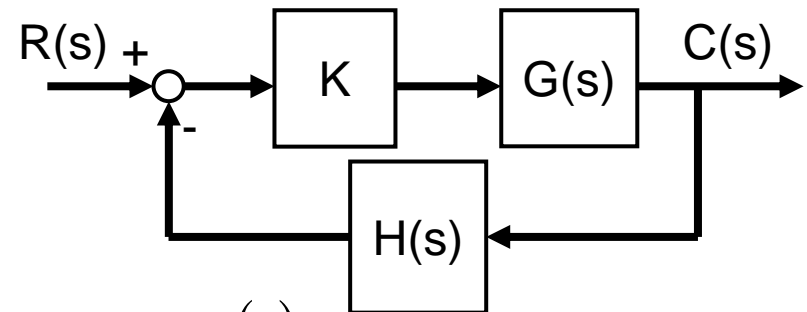
根軌跡法

- システムの過渡応答は極の位置(値)に関係する
- 制御ゲインにより極の場所(値)が変わる
 - どのように変化するのか注目
- 設計
 - 適切なゲインの設定により, 極を所期の場所に配置
 - システムの極や零の追加の影響の定性的な評価

根軌跡

- ゲインKを持つフィードバック制御システム

– 閉ループ伝達関数



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

- sの多項式で表す

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, H(s) = \frac{d(s)}{c(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \frac{b(s)}{a(s)}}{1 + K \frac{b(s)}{a(s)} \frac{d(s)}{c(s)}} = K \frac{b(s)}{a(s)} \frac{a(s)c(s)}{a(s)c(s) + Kb(s)d(s)} = K \frac{b(s)c(s)}{a(s)c(s) + Kb(s)d(s)}$$

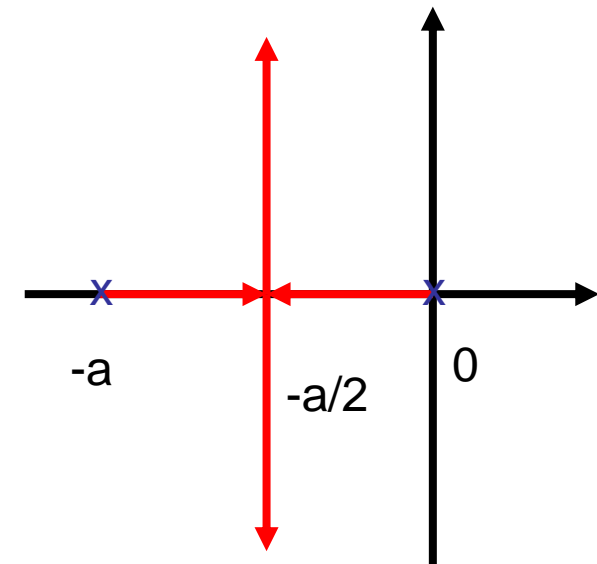
- ac+kbd=0 → 根は伝達関数の極
- bc=0 → 根は伝達関数の零点

根軌跡
根のs平面上の変化

2010/6/21 • K:0 → ∞で伝達関数の極(特性方程式の根)は変化 26

根軌跡の例

- 二次遅れシステム $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$
 - 特性方程式 $s^2 + as + K = 0$
 - $K=0$ $s_1 = 0, s_2 = -a$
 - $0 \leq K \leq a^2/4$
 - $a^2/4 < K$ $s_1, s_2 = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4K}}{2}$
 $s_1, s_2 = -\frac{a}{2} \pm j \frac{\sqrt{4K - a^2}}{2}$
 - 固有角周波数 $\omega_n = \sqrt{K}$
 - 減衰定数 $\zeta = \frac{a}{2\sqrt{K}}$



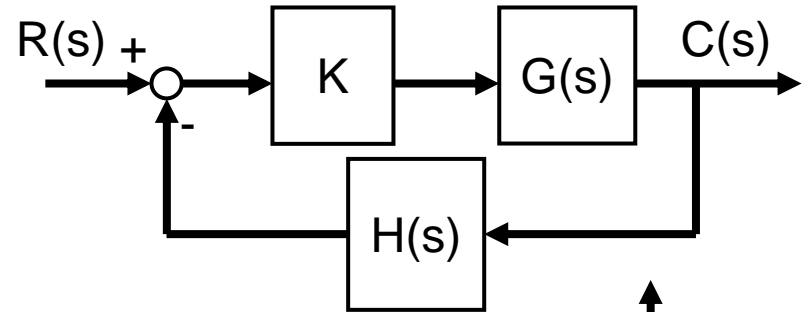
根軌跡の性質1

- 伝達関数 $1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{c(s)}{d(s)} = 0$
 - $d(s)$: n 次, $c(s)$: m 次, $m < n$
- 始点 $K=0$: $d(s)=0$ → 伝達関数の極に対応
- 終点 $K=\infty$: $Kc(s)=0$ → m 個は零点に対応
 - 極は零点より多い($m < n$)ので残りは無限遠点に終わる
- 実軸対称 特性方程式の根は実数または共役複素数なので, 根の配置は実軸対称
- 枝数 特性方程式の根は n 個 → 根軌跡の枝数 n 本

根軌跡

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)}, H(s) = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+2)(s+5) + K}$$



• $s(s+2)(s+5)+K=0$ の根軌跡

– 漸近線

- 極の数 $n=3$, 零の数 $m=0$, ($r=n-m=3$)

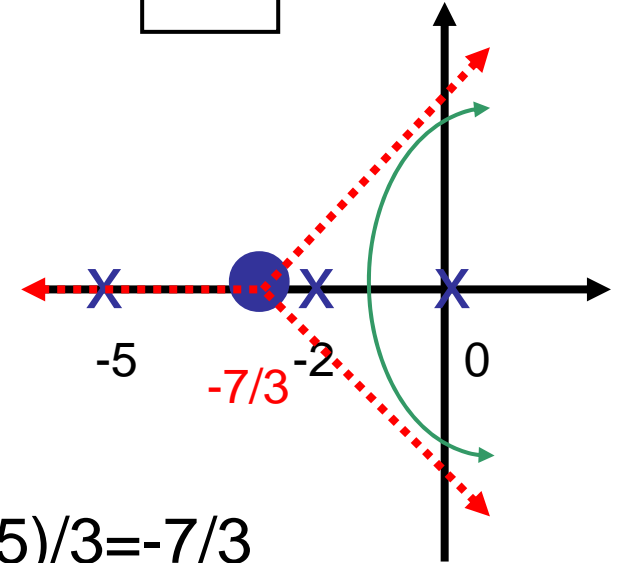
– 無限遠点に向かう軌跡の漸近線

- 漸近線の実軸上の交点座標 $= (0-2-5)/3 = -7/3$

$$s_a = \frac{(\text{極の座標の総和}) - (\text{零点の座標の総和})}{r}$$

- 漸近線の方角 $= \pi/3, \pi, 5/3\pi$

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{r}, k = 0, 1, 2, \dots, |r|-1$$



根軌跡

- 極, 零点の付加により根軌跡が変化

– 二次遅れシステム

$$KG(s)H(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

– 極の付加

- 根軌跡を極から離す

$$KG(s)H(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$$

– 零点付加

- 零点に根軌跡を引き込む

$$KG(s)H(s) = \frac{s+c}{s(s+a)}$$

