

制御工学I 第12回
周波数特性
ボード線図
ナイキスト線図

平成22年7月5日

ボード線図

一次のシステム1

• 一次のシステム \rightarrow $\boxed{\frac{1}{1+sT}}$ \rightarrow $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 振幅 $20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$

– 位相 $\frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}$

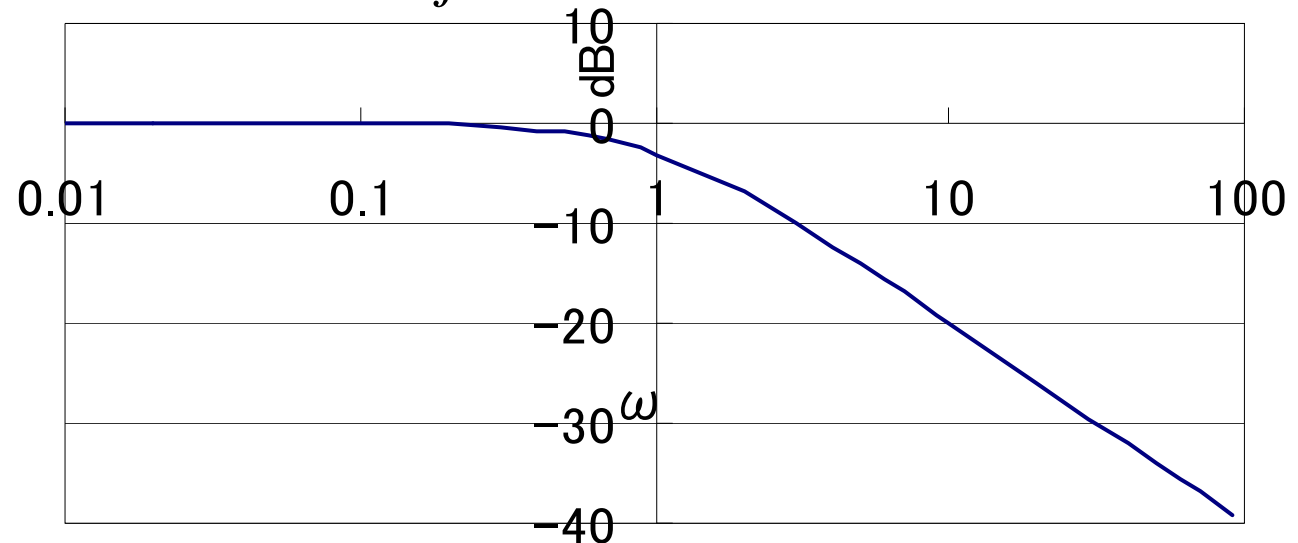
$$\tan \phi = \frac{\left| \frac{-j\omega T}{1+(\omega T)^2} \right|}{\left| \frac{1}{1+(\omega T)^2} \right|} = -\omega T \quad \Rightarrow \quad \phi = -\tan^{-1} \omega T$$

ボード線図

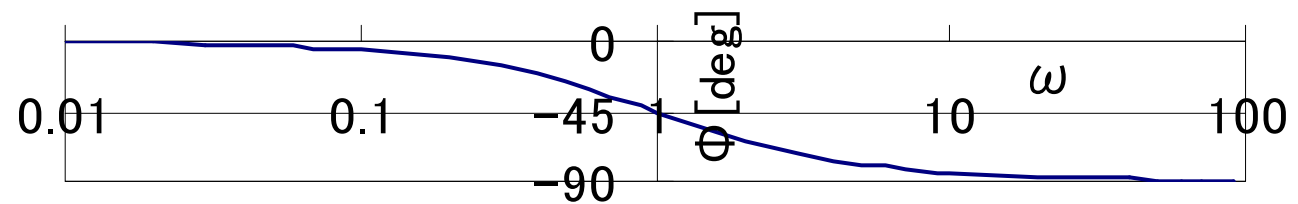
一次のシステム2

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$ LPF特性

— 振幅



— 位相



ボード線図

一次のシステム3

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$
 - 振幅の性質 $20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$
 - 高周波 ($\omega \gg 1/T \rightarrow 1 \ll \omega T$) $\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong \omega T$
 - $-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong -20\log\omega T \text{ dB}$
 - -20dB/decade
(周波数が一桁上がると振幅が20dB小さくなる)
 - » 0dB for $\omega=1/T$
 - » -20dB for $\omega=10/T$ 近似

ボード線図

一次のシステム4

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 振幅の性質

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$$

- 低周波 ($\omega \ll 1/T$) $\rightarrow \sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong 1$ ほぼ一定

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong -20\log 1 = 0 \text{ dB}$$

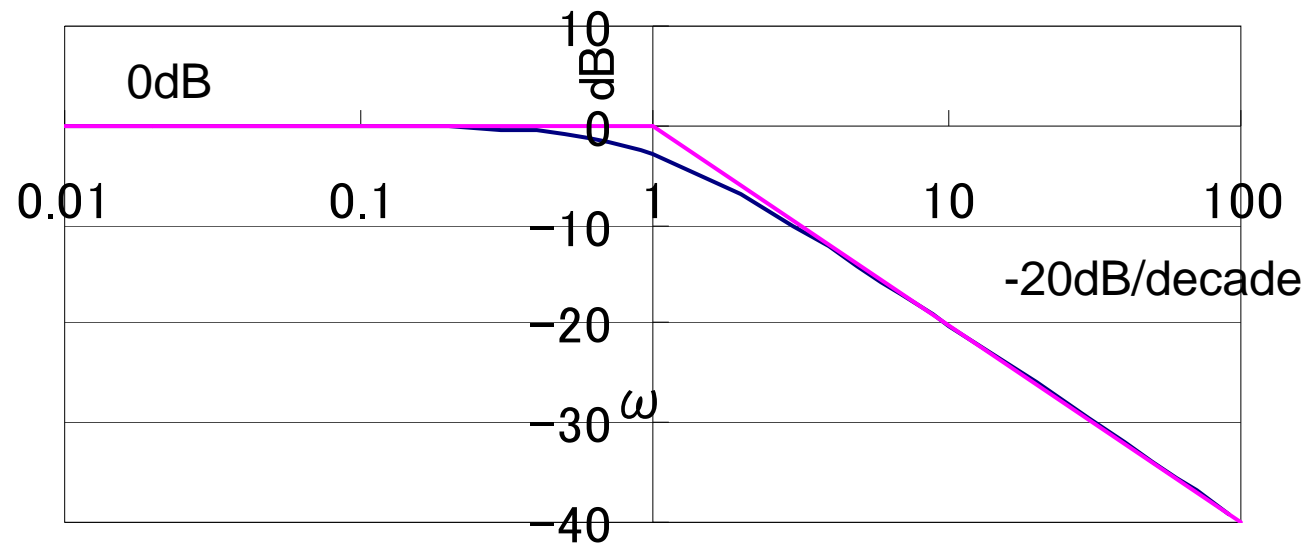
– 振幅の近似線

- 二つの直線で近似できる
 - 低周波領域 $0 < \omega < 1/T \rightarrow 0 \text{ dB}$
 - 高周波領域 $1/T < \omega < \infty \rightarrow -20 \text{ dB/decade}$
- 折点周波数 $\omega = 1/T$ で交わる

ボード線図

一次のシステム5

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$
 - 振幅の近似線



ボード線図

一次のシステム6

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 位相の性質

- 折点周波数を中心に奇対称(atan)

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

- 直流 0°

- 折点周波数 -45° $\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{\omega T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$

- $\infty \rightarrow -90^\circ$

ボード線図

一次のシステム7

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 振幅の近似線の誤差

- 最大値→折点周波数($\omega T=1$)

$$-20\log\sqrt{1+1} + 20\log 1 = -\frac{20}{2}\log 2 + 0 = -3.03dB$$

この外では
誤差1dB以下

- 1オクターブ下

$$-20\log\sqrt{\frac{1}{4}+1} + 20\log 1 = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97dB$$

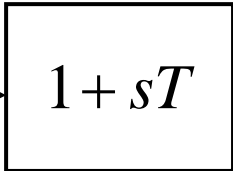
- 1オクターブ上

$$-20\log\sqrt{4+1} + 20\log 2 = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97dB$$

1Decade離れると誤差は-0.04dB以下

ボード線図

一次のシステム8

- 一次のシステムの扱い →  → $1 + j\omega T$
 - 振幅 → 符号反転

$$20\log|1 + j\omega T| = -20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right|$$

- 位相 → 符号反転

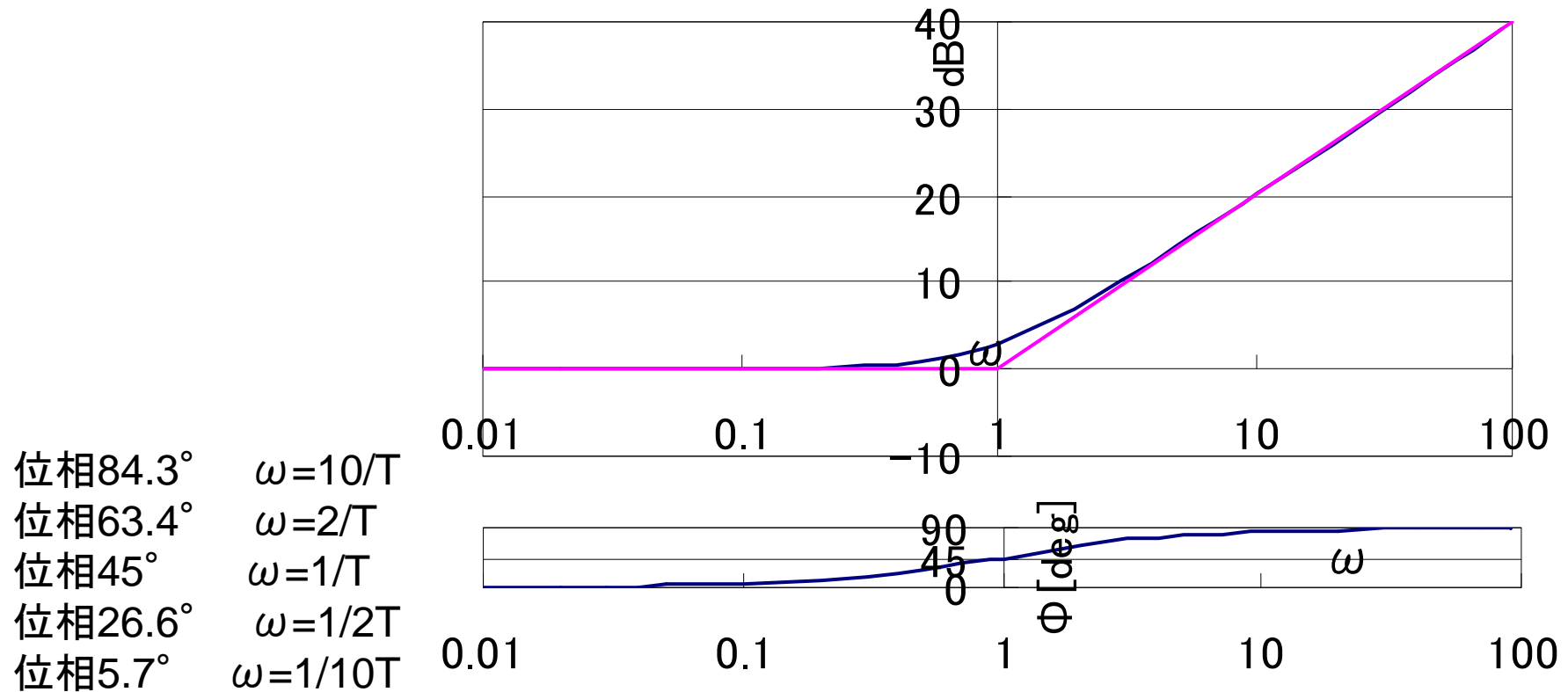
$$\angle 1 + j\omega T = \tan^{-1} \omega T = -\angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$

ボード線図は上下反転

ボード線図

一次のシステム9

- 一次のシステムの扱い $1 + j\omega T$ HPF特性

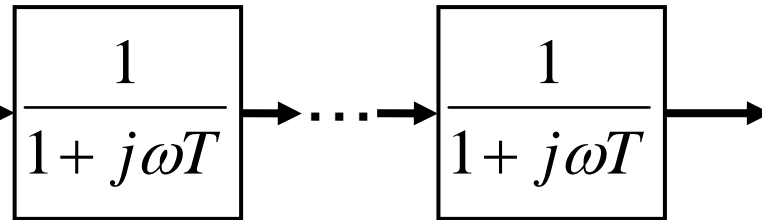


ボード線図は上下反転

ボード線図

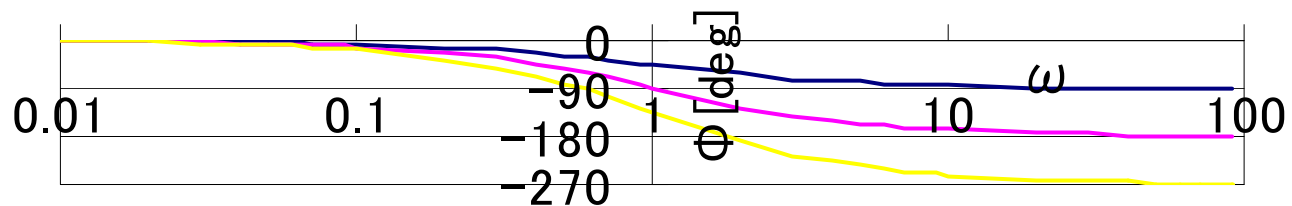
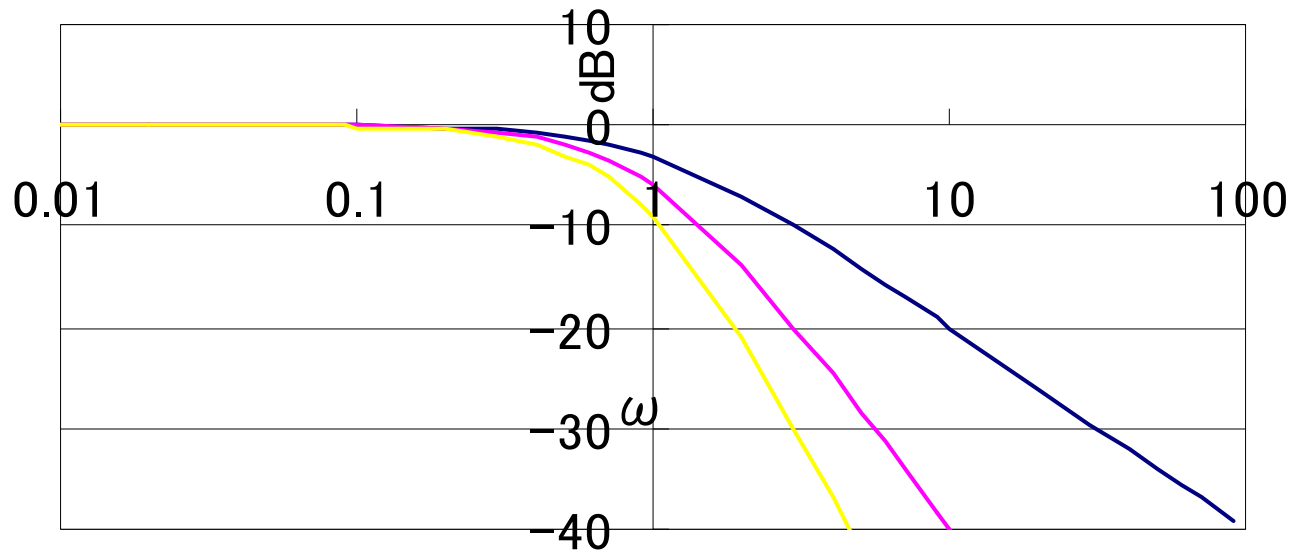
一次のシステム10

- 一次のシステムn段
- n倍



$$\left(\frac{1}{1 + j\omega T} \right)^n$$

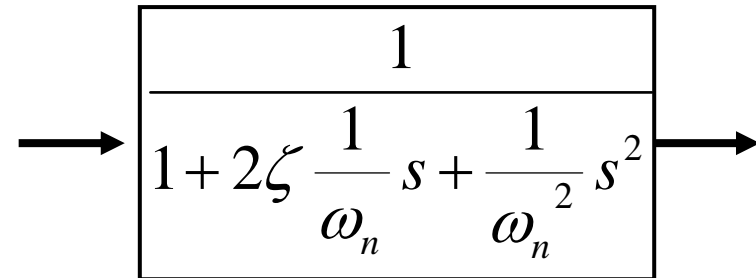
一次のシステムのn乗は、加算で表される



ボード線図

二次のシステム1

- 二次のシステム



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

– 減衰比 ζ

– 共振周波数 $\omega = \omega_n \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \right)^2 - 4 \frac{1}{\omega_n^2} = \left(\frac{2}{\omega_n} \right)^2 (\zeta^2 - 1)$

– 判別式(減衰比 ζ)

- $\zeta > 1$: 実根を持つ一次システム $\times 2$

- $0 < \zeta < 1$: 共役複素根を持つ

ボード線図

二次のシステム2

- 二次のシステム $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$
- 振幅

$$20\log\left|\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\left|1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|$$
$$= -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ dB}$$

ボード線図

二次のシステム3

- 二次のシステムの位相

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right\}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right\}^2} \end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム4

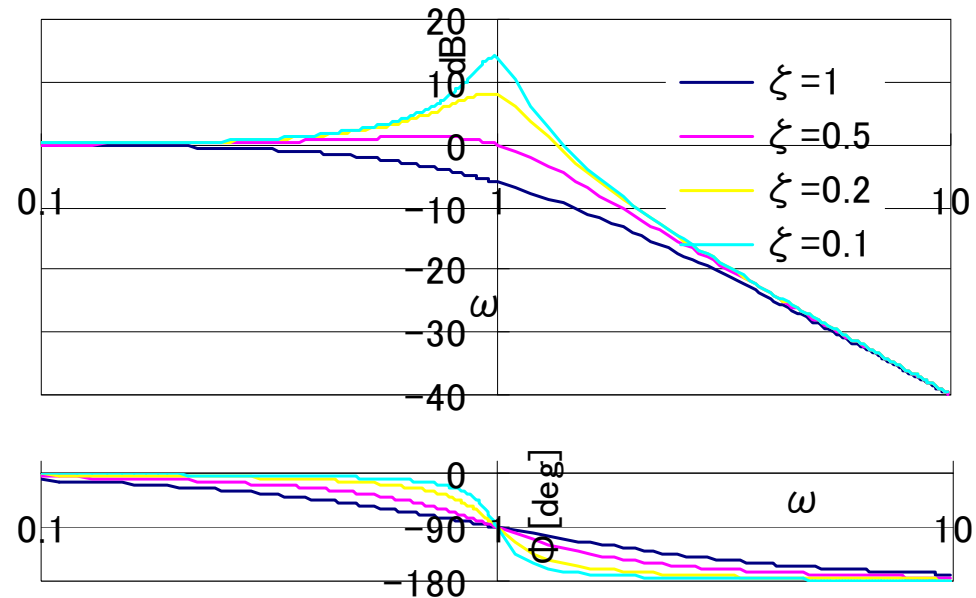
- 二次のシステムの位相

$$\begin{aligned}\phi &= \angle \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2} \\ &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム5

- 二次のシステム
 - ボード線図
 - ζ が小さいとピークを持つ



ボード線図

二次のシステム6

- 振幅の近似線

- 減衰比 ζ を無視

- 高周波領域 $\omega \gg \omega_n (1 \gg \omega/\omega_n)$

$$\begin{aligned} -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} &\cong -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} \\ &= -20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB} \end{aligned}$$

- 高周波領域近似線

- 傾き -40dB/decade $-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 \left(\log 10 + \log \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

ボード線図

二次のシステム7

- 振幅の近似曲線
 - 減衰比 ζ を無視

- 低周波領域 $\omega \ll \omega_n (1 \gg \omega/\omega_n)$
 - 0dBの水平線

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cong -20 \log 1 = 0 \text{dB}$$

- 交点(折点周波数)
 - $\omega/\omega_n = 1 \rightarrow$ 共振点 $\omega = \omega_n$
- 減衰比 ζ で共振点でのピーク値が変わる
 - 近似値 0dB
 - 減衰比 ζ が小さいと、ピークが大きくなり、近似からの乖離大

ボード線図

二次のシステム8

- 位相の特性

- 周波数 ω と減衰比 ζ に依存

- 直流 $\omega=0$

- 位相 0°

- 折点周波数 $\omega=\omega_n$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta}{0} = -90^\circ$$

- 高周波 $\omega=\infty$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{1}{\infty} = -180^\circ$$

ボード線図

二次のシステム9

- 二次のシステムの共振周波数とピーク値

– 二次のシステム $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$

- 振幅

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

ボード線図

二次のシステム10

- 振幅の極大値
 - 分子→定数
 - 分母→振幅極少値→二乗の極小値

$$\begin{aligned}g(\omega) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \\ &= 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \\ &= 1 - 2(1 - 2\zeta^2) \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム11

- 振幅の極大値(二次関数)

$$\begin{aligned}g(\omega) &= 1 - (1 - 2\zeta^2)^2 + (1 - 2\zeta^2)^2 - 2(1 - 2\zeta^2) \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 \\ &= 1 - (1 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4) \left[(1 - 2\zeta^2) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^2 \\ &= 4\zeta^2(1 - \zeta^2) + \left[\frac{\omega_n^2(1 - 2\zeta^2) - \omega^2}{\omega_n^2} \right]^2\end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム12

– 極値をとる共振周波数 ω_r

$$\left[\frac{\omega_r^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2} \right]^2 = 0$$

$$\omega_r^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2) = 0$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

ただし
– 分母の極値 $1 - 2\zeta^2 \geq 0 \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$

$$g(\omega_r) = 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

ボード線図

二次のシステム13

- 減衰比 ζ が零に近づくと, 共振周波数は ω_n に近づく
- 減衰比 $\zeta > 0.707$ では共振ピークを持たない
 - » 周波数が高くなるに従い振幅減少(単調減少)
 - » 振幅Mは1(0dB)以下

- 減衰比 $0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ でのピーク振幅 M_r

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{4\zeta^2(1-\zeta^2)}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ボード線図

二次のシステム14

– 共振周波数での位相

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_r) &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega_r}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}\right)^2} \\ &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \sqrt{1-2\zeta^2}}{1 - \left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \sqrt{1-2\zeta^2}}{1 - (1-2\zeta^2)}\end{aligned}$$

つづく→

ボード線図

二次のシステム15

– 共振周波数での位相

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_r) &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \sqrt{1-2\zeta^2}}{2\zeta^2} = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} \\ &= -90^\circ + \arcsin \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム16

• 二次のシステム \rightarrow $\boxed{1 + 2\zeta \frac{1}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$ \rightarrow

$$1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

– 符号を反転

- 振幅(対数)
- 位相

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$