

制御工学I 第13回  
周波数特性  
ナイキスト線図  
ニコルス線図

平成22年7月12日

# ボード線図の書き方

- 伝達関数  $G(s) = \frac{10s + 30}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s} = \frac{10(s + 3)}{s(s + 2)(s^2 + s + 2)}$

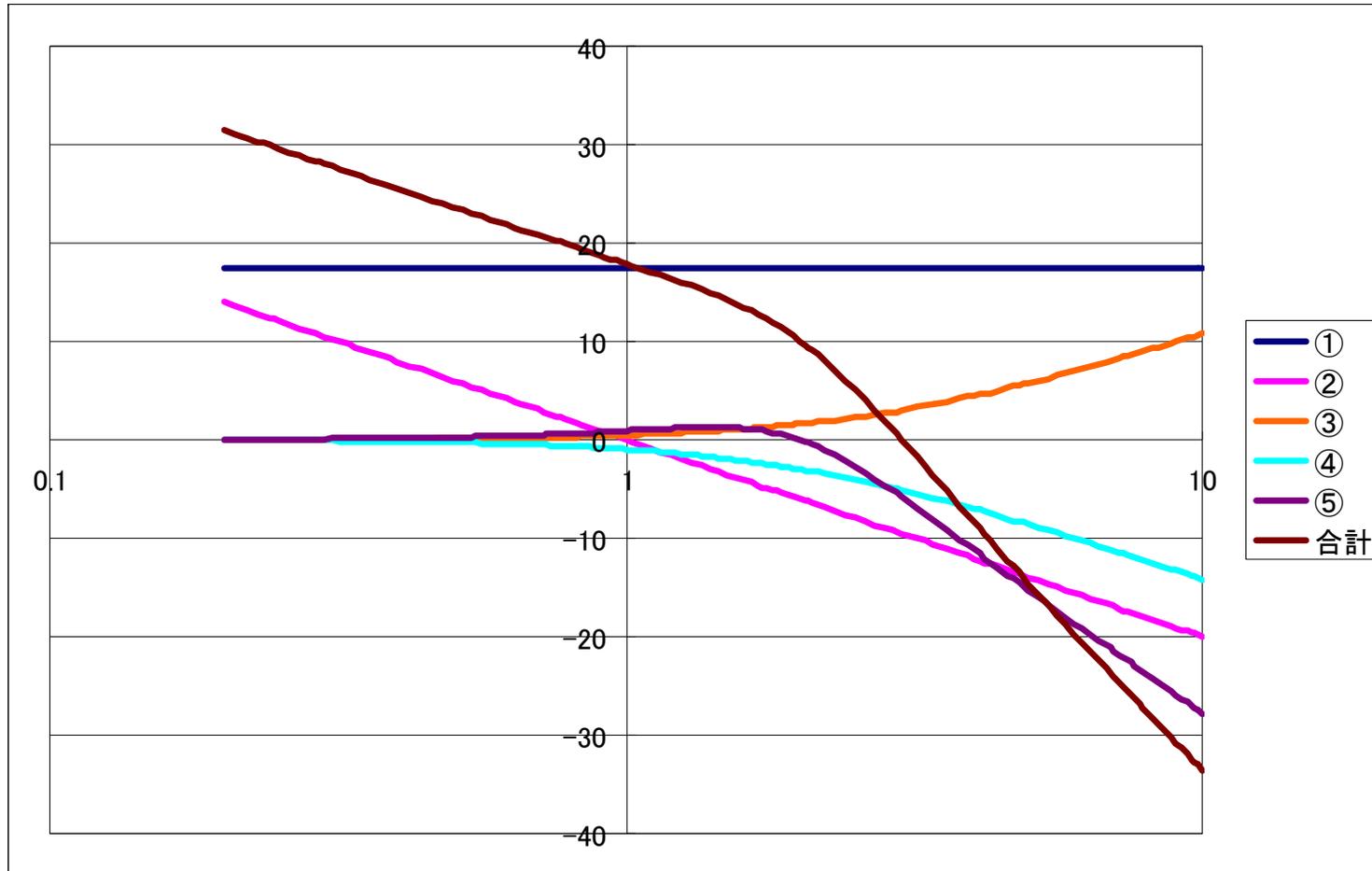
- 周波数伝達関数

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega + 2)((j\omega)^2 + j\omega + 2)} \\ &= \frac{10\left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)3}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)2\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)2} = \frac{7.5\left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

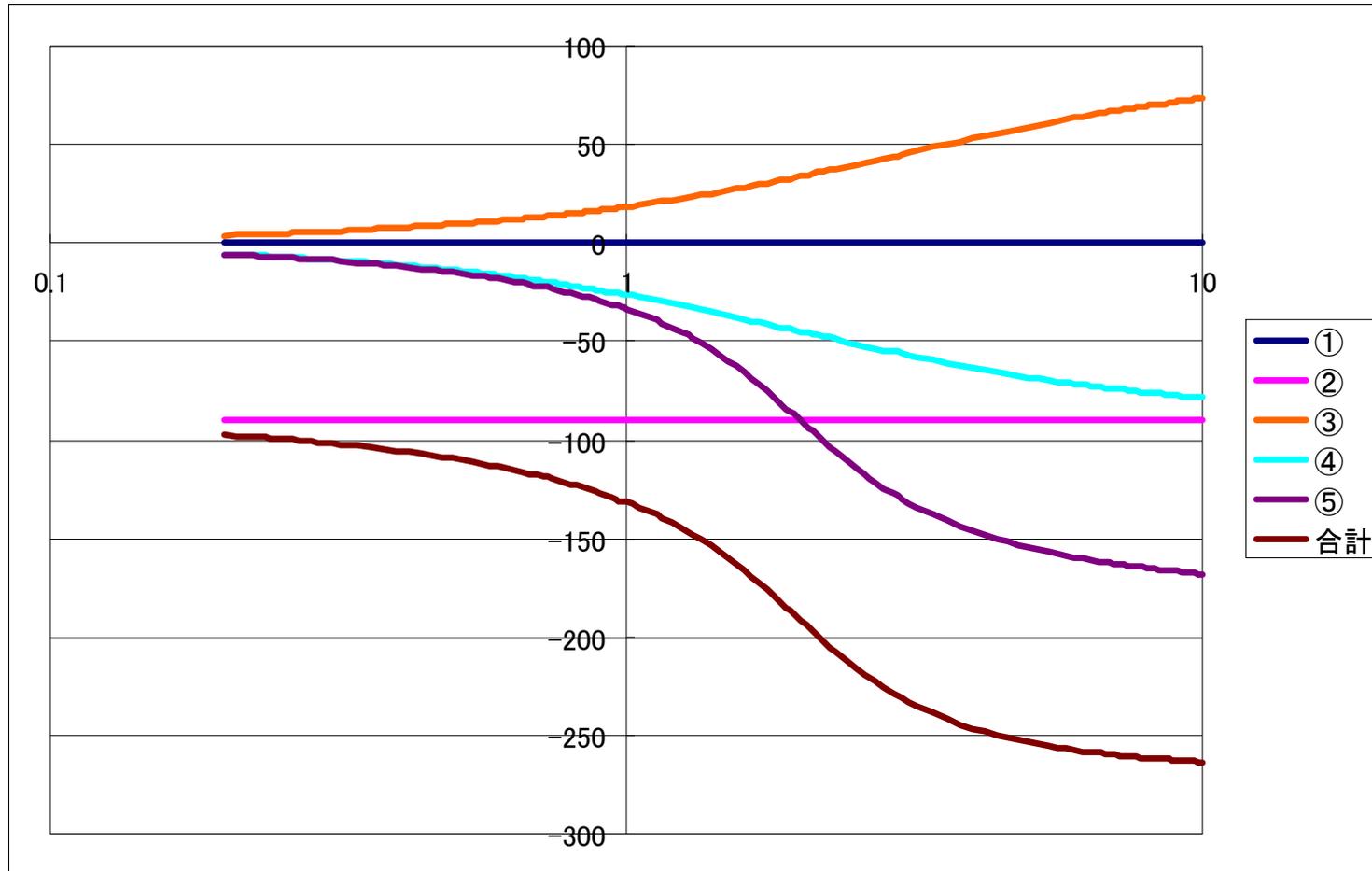
# ボード線図の書き方

- 周波数伝達関数の構成要素と振幅
  - 7.5 水平直線:  $20\log 7.5$
  - $(j\omega)^{-1}$  直線: 傾き  $-20\text{dB/dec}$  ( $0\text{dB}$  @  $\omega=1$ )
  - $1 + \frac{j\omega}{3}$  近似直線:  $0\text{dB}$ , 折点  $\omega=3$ , 傾き  $20\text{dB/dec}$
  - $\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)^{-1}$  近似直線:  $0\text{dB}$ , 折点  $\omega=2$ , 傾き  $-20\text{dB/dec}$
  - $\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1}$  近似直線: 減衰係数  $\zeta = 0.3536$   
 $0\text{dB}$ , 折点  $\omega = \sqrt{2}$ , 傾き  $-40\text{dB/dec}$

# ボード線図ゲイン



# ボード線図位相



# ベクトル軌跡

- 周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の極座標表示
  - 振幅, 位相角の応答
- ナイキスト(Nyquist)線図
  - 複素平面表示
  - 周波数 $\omega$ を $0 \rightarrow \infty$

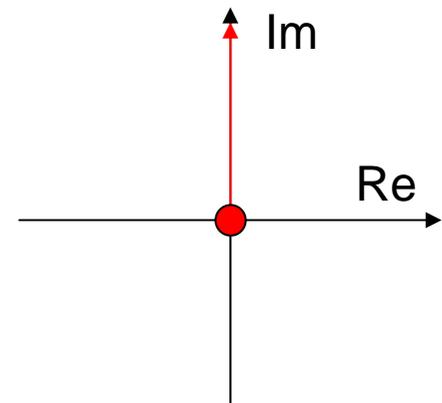
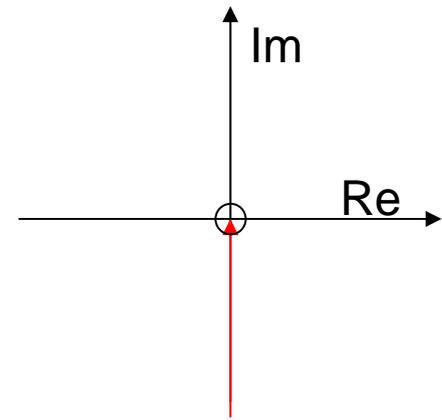
# ナイキスト線図1

- 積分要素  $\longrightarrow$   $\boxed{1/S}$   $\longrightarrow$   
- 虚軸・負の部分  $-\infty \rightarrow 0$

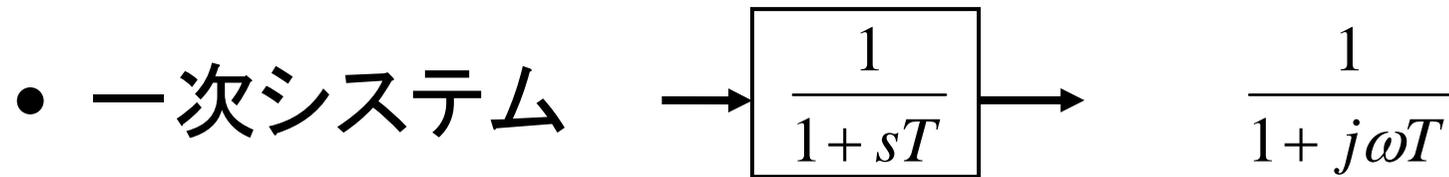
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

- 微分要素  $\longrightarrow$   $\boxed{S}$   $\longrightarrow$   
- 虚軸・正の部分  $0 \rightarrow \infty$

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$$



# ナイキスト線図2



$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T$$

– 実・虚成分に分離

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2} = X + jY$$

$$X = \frac{1}{1+\omega^2 T^2}$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

# ナイキスト線図

$$\begin{aligned}\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 &= \left(\frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2 - (1 + \omega^2 T^2)}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \omega^2 T^2}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right)^2 + \left(\frac{-2\omega T}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right)^2 \left(1 - 2\omega^2 T^2 + (\omega^2 T^2)^2 + 4\omega^2 T^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right)^2 \left(1 + 2\omega^2 T^2 + (\omega^2 T^2)^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

# ナイキスト線図3

- 実・虚成分に分離

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

» 中心(0.5,0)半径0.5

» 下半円  $0 \leq \omega \leq \infty$  上半円  $-\infty \leq \omega \leq 0$

» 周波数を0→無限大

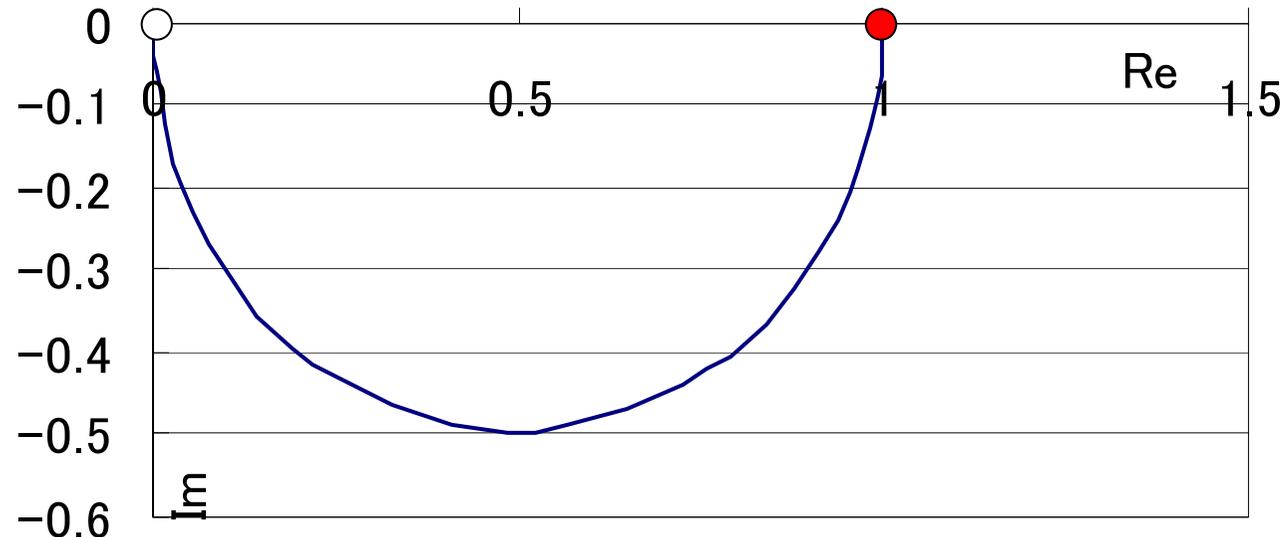
$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -\arctan 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -\arctan \infty = 0 \angle -90^\circ$$

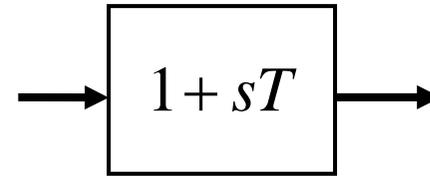
# ナイキスト線図4

- 一次システム
  - 周波数0→無限大
    - 半円となる



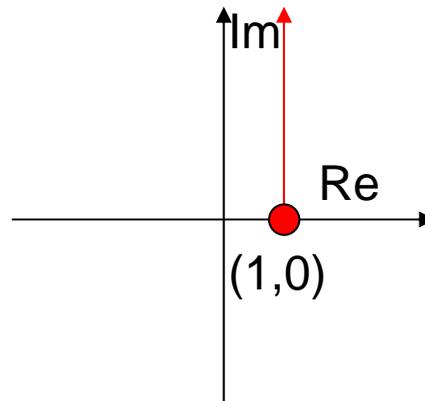
# ナイキスト線図3

— 一次システム

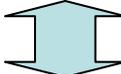


$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

- (1,0)を通る虚軸に平行な直線



$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

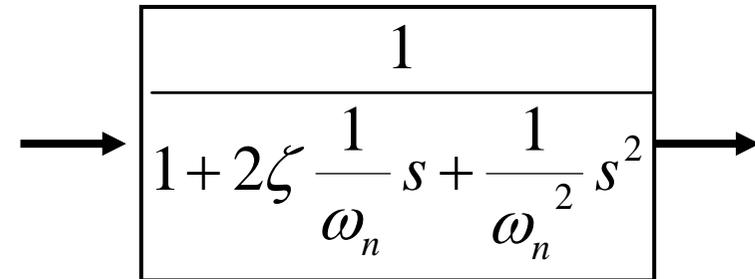
完全に異なる 

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

ボード線図では符号が反転しただけだったのとは大きな違い

# ナイキスト線図4

- 二次システム
  - 但し減衰比  $\zeta > 0$ 
    - 実・虚成分に分離



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

$$G(j\omega) = X + jY$$

$$X = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

$$Y = \frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

# ナイキスト線図5

– 周波数を0→無限大

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

- 減衰比  $0 < \zeta < 1$

– 軌跡と虚軸の交点

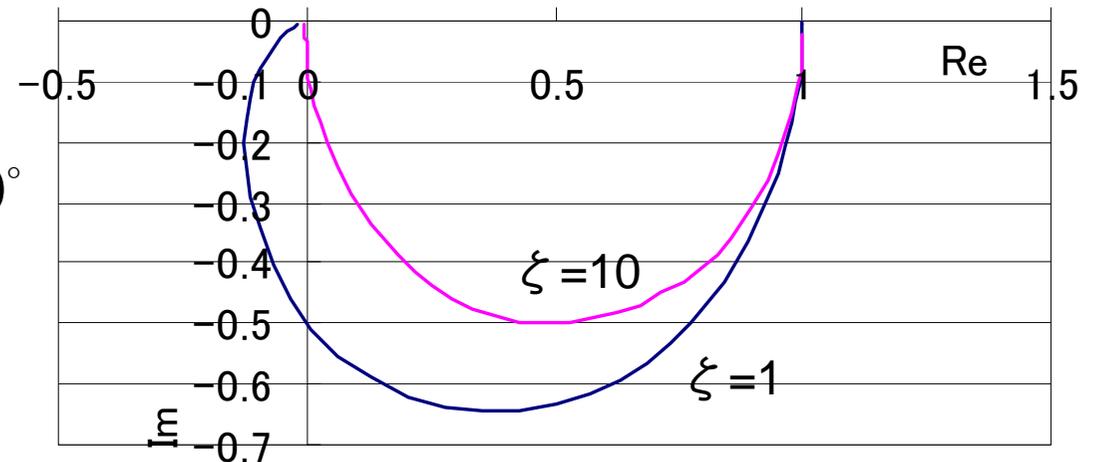
$$\omega = \omega_n$$

– 共振周波数 ( $\omega = \omega_r$ ) で原点からの距離最大となる

- 減衰比  $1 < \zeta$  (過制動)

– 軌跡は半円に近づく

- 一次のシステムに近い

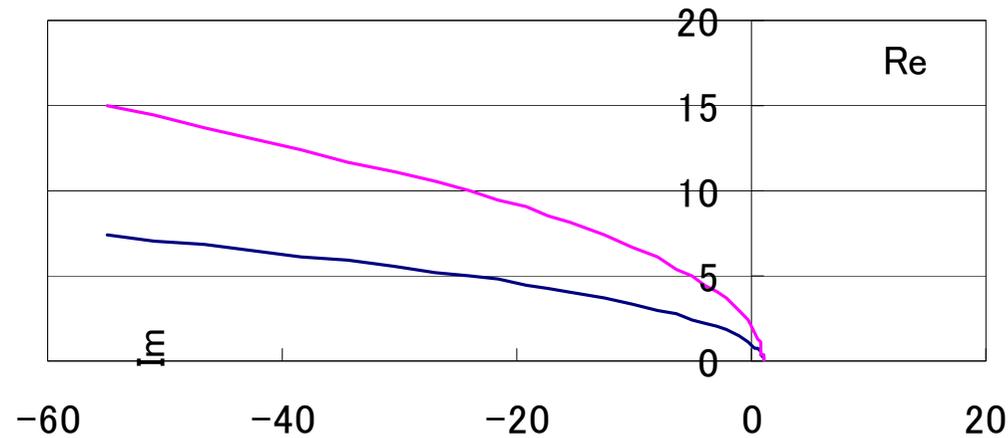


# ナイキスト線図5

- 二次システム

$$\rightarrow \boxed{1 + 2\zeta \frac{1}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2} \rightarrow$$

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$



# ナイキスト線図6

- 一般化した伝達関数のナイキスト線図  
– 分子の次数が分母より低い( $n > m$ )

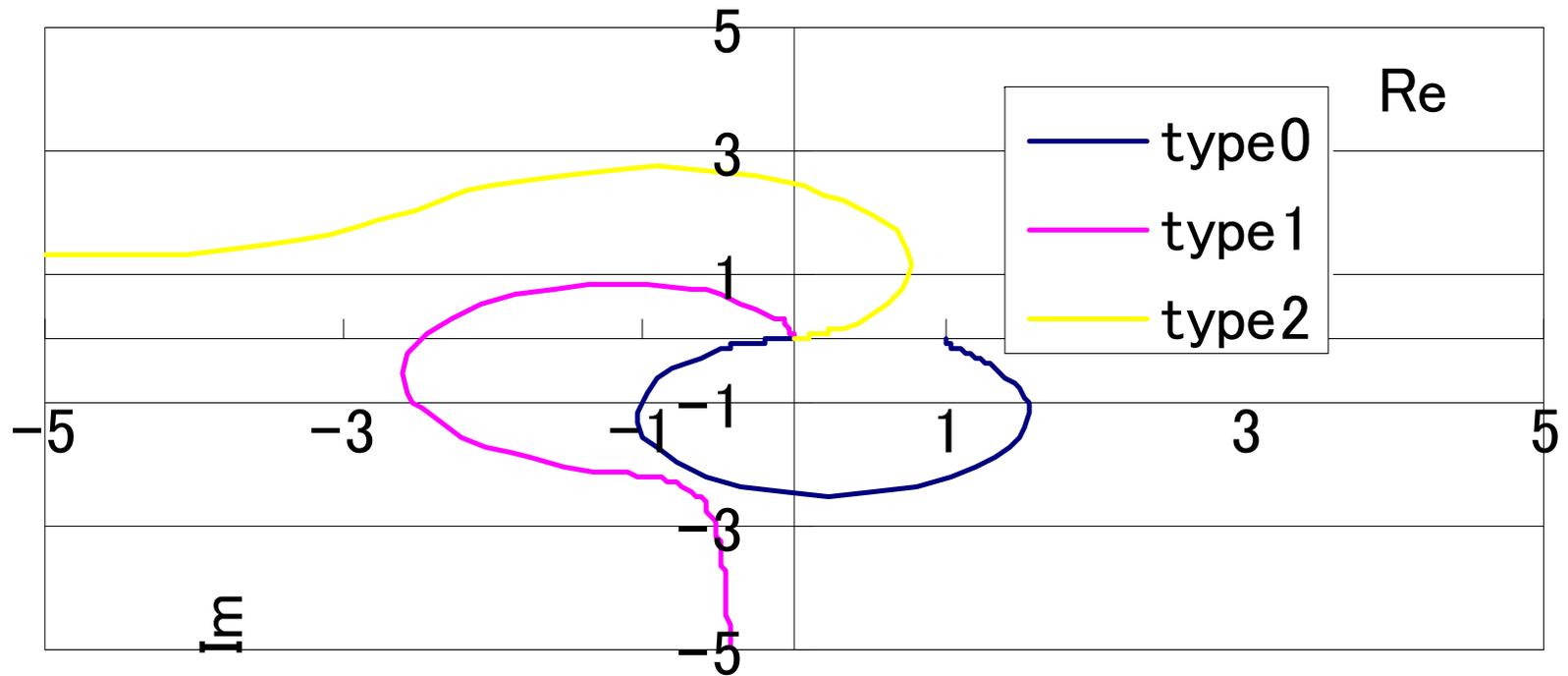
$$G(s) = \frac{K(1 + sT_{b1})(1 + sT_{b2}) \cdots (1 + sT_{bn-\lambda})}{s^\lambda (1 + sT_{a1})(1 + sT_{a2}) \cdots (1 + sT_{an-\lambda})} \quad \text{分母の零根次数 } \lambda$$

$$= \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_{b1})(1 + j\omega T_{b2}) \cdots (1 + j\omega T_{bn-\lambda})}{(j\omega)^\lambda (1 + j\omega T_{a1})(1 + j\omega T_{a2}) \cdots (1 + j\omega T_{an-\lambda})}$$

$$= \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \cdots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \cdots + a_n(j\omega)^n}$$

# ナイキスト線図7



# ナイキスト線図8

- Type0 ( $\lambda = 0$ )
  - 開始点( $\omega = 0$ )実軸上の点。傾きは虚軸に平行
  - 終端点( $\omega = \infty$ )原点
- Type1 ( $\lambda = 1$ )
  - 分母の $j\omega$ が $-90^\circ$  位相をずらす
  - 開始点:振幅 $\infty$ , 位相 $-90^\circ$
  - 終端点( $\omega = \infty$ ):振幅0, 傾き:軸に平行
- Type2 ( $\lambda = 2$ )
  - 分母の $(j\omega)^2$ が $-180^\circ$  位相をずらす
  - 開始点:振幅 $\infty$ , 位相 $-180^\circ$
  - 終端点( $\omega = \infty$ ):振幅0, 傾き:実軸の負の部分に平行

# ニコルス線図

- 対数振幅(dB表示)-位相(位相余裕 $\Phi$ -(-180))
  - ボード線図は対数振幅と位相を別の線で表示
  - ニコルス線図は同時に表示
    - 閉ループシステムの安定性が分かる
    - 正弦波伝達関数の $G(j\omega)$ と $1/G(j\omega)$ は歪対称

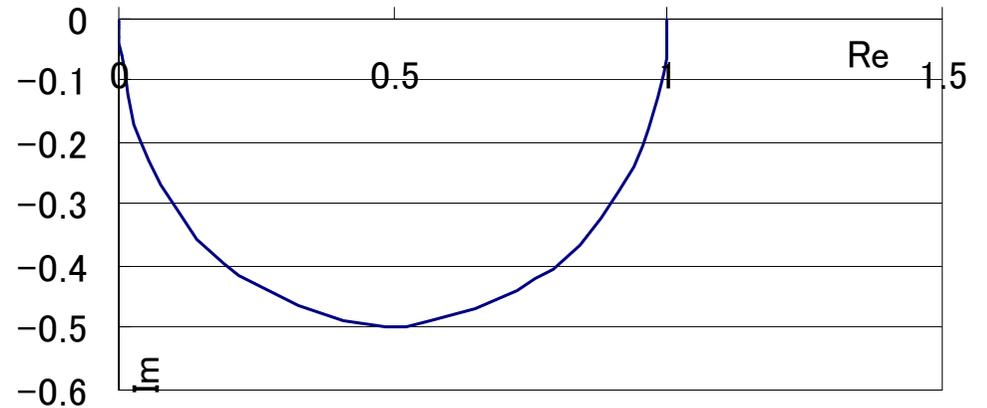
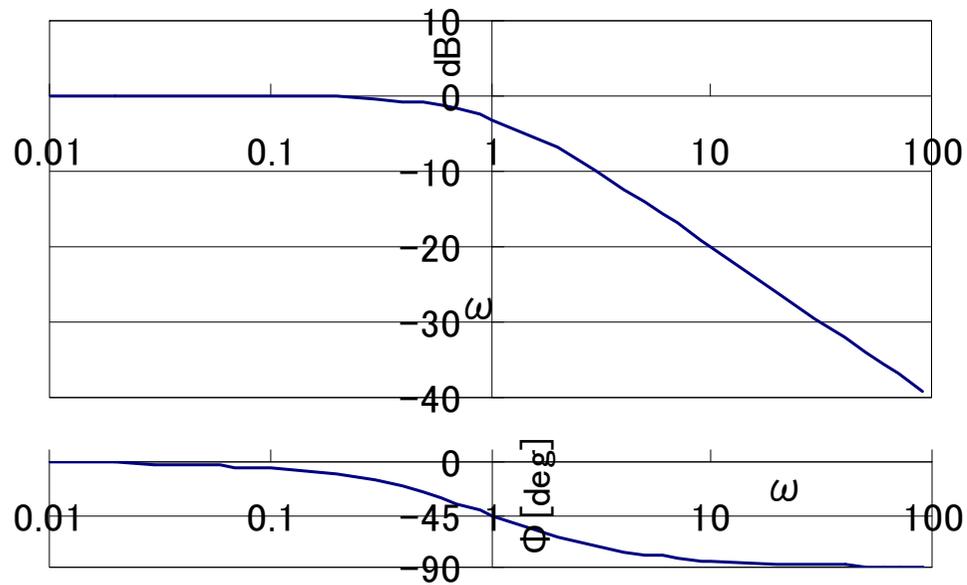
$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log|G(j\omega)|$$

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

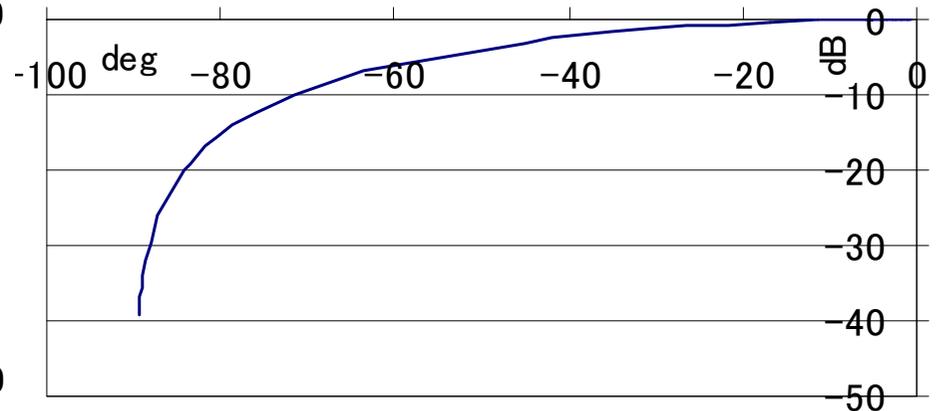
# ニコルス線図 ナイキスト線図

$$\frac{1}{1 + j\omega T}$$

ボード線図



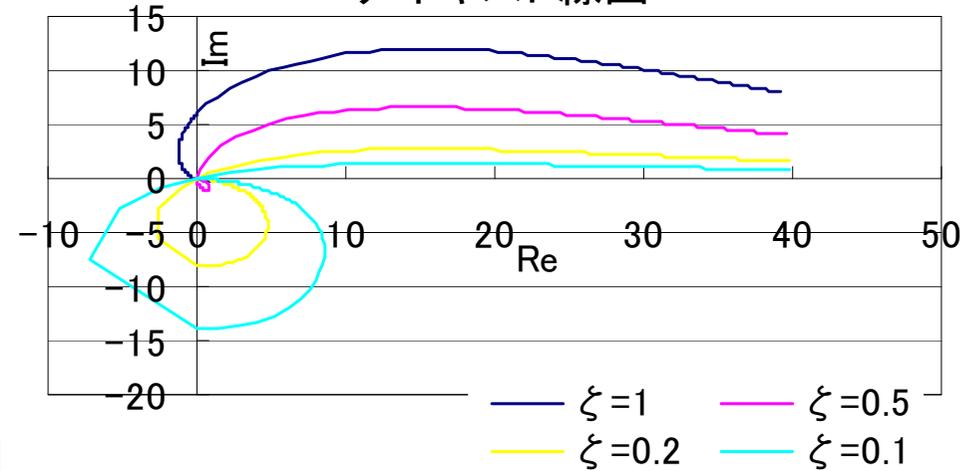
ニコルス線図



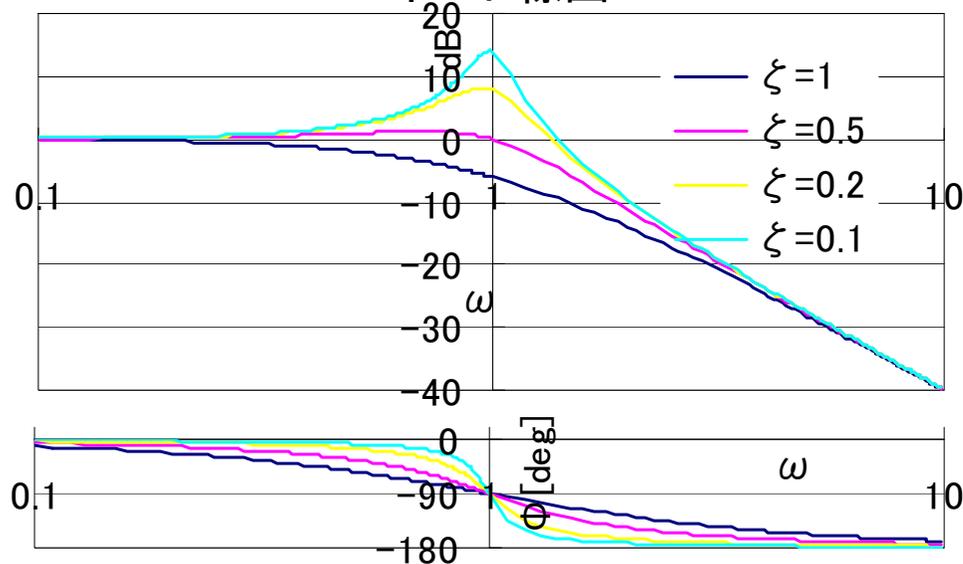
# ニコルス線図

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

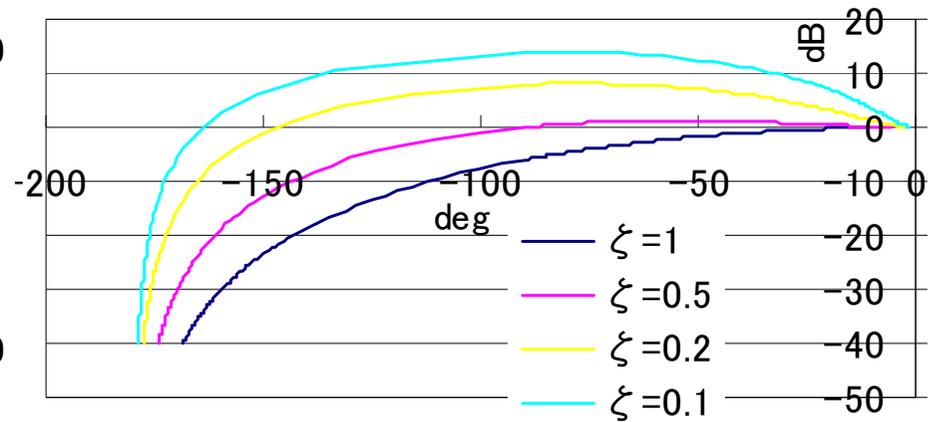
ナイキスト線図



ボード線図



ニコルス線図



# 制御理論の歴史と分類

- 古典制御
  - 本授業の対象
  - ~1950
  - PID
  - 伝達関数
  - 周波数応答
- 現代制御
  - 1960~1980
  - 状態方程式
  - 多入出力系
  - 可制御性・可観測性
  - 最適レギュレータ
- その他
  - 1980~
  - $H^\infty$ 制御
    - 外乱抑制性能を $H^\infty$ ノルムで評価
    - ロバスト安定性
  - NN制御
  - ファジイ制御