制御工学I
第5回
制御システムの
モデリングと伝達関数3

平成22年05月17日

授業の予定

- 制御工学概論（１回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（１回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（３回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（３回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（２回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（４回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

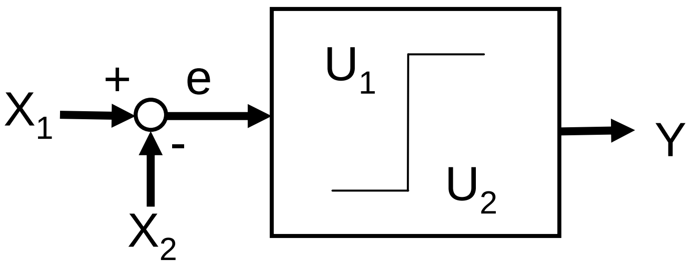
産業用機器で用いられる制御

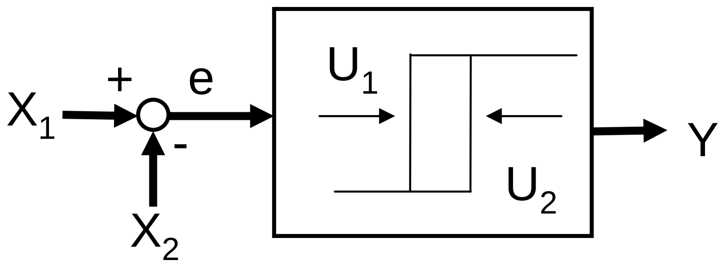
- 二値制御（オン・オフ制御）
- 比例制御
- 積分制御
- 比例積分制御
- 比例微分制御
- 比例積分微分制御

二値(オン･オフ)制御

- 簡単･安価
  - 操作信号u(t)
  - 誤差信号e(t)

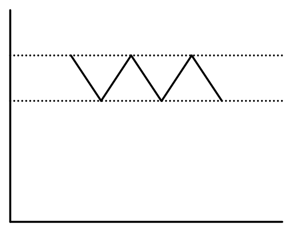
$$u(t)=\begin{cases} U_1 & e(t)\geq 0 \\ U_2 & e(t)<0 \end{cases}$$





  - 例　便所の水タンク
  - 不感帯の幅で誤差幅･動作回数変わる

ヒステリシス
（不感帯）



比例(P)制御

- 出力u(t)と誤差e(t)に比例関係
  - 比例ゲインKp

$$u(t) = K_p e(t)$$

- 伝達関数
  - ラプラス変換

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

積分(I)制御

- 出力変化率が誤差に比例
  - 積分ゲインKi

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t)dt$$

- 伝達関数
  - ラプラス変換

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

比例積分(PI)制御

- 出力u(t)と誤差e(t)の関係
  - 比例ゲインKp
  - 積分ゲインKi

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt$$

- 伝達関数
  - ラプラス変換

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

比例微分(PD)制御

- 出力u(t)と誤差e(t)の関係
  - 比例ゲインKp
  - 微分ゲインKd

$$K_d = K_p T_d$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- 伝達関数
  - ラプラス変換

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

比例積分微分(PID)制御

- 出力u(t)と誤差e(t)の関係
  - 比例ゲインKp
  - 積分ゲインKi
  - 微分ゲインKd

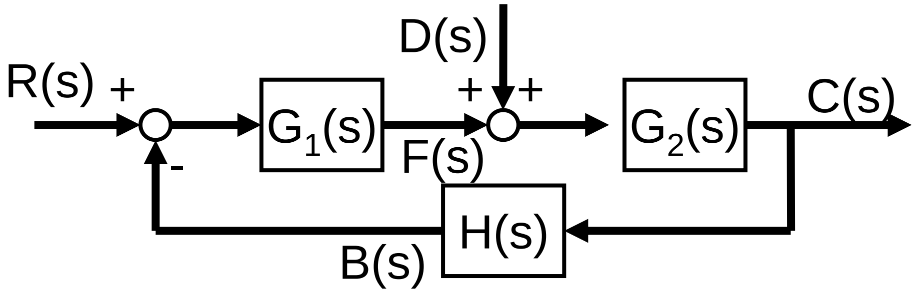
$$K_i = \frac{K_p}{T_i}, K_d = K_p T_d$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- 伝達関数
  - ラプラス変換

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

擾乱を考慮した閉ループシステム



- 制御目標入力R(s)
- 擾乱D(s)
- 制御目標入力R(s)に対応する応答C_R(S)

$$B(s) = H(s)C_R(s)$$

$$\begin{aligned} C_R(s) &= G_1(s)G_2(s)[R(s) - B(s)] \\ &= G_1(s)G_2(s)[R(s) - H(s)C_R(s)] \end{aligned}$$

擾乱を考慮した閉ループシステム

$$\left[1+G_1(s)G_2(s)H(s)\right]C_R(s)=G_1(s)G_2(s)R(s)$$

$$\frac{C_R(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 擾乱D(s)に対する応答C_D(S)

$$C_D(s)=G_2(s)\left[D(s)+F(s)\right]$$

$$F(s)=-G_1(s)H(s)C_D(s)$$

$$C_D(s)=G_2(s)\left[D(s)-G_1(s)H(s)C_D(s)\right]$$

$$\left[1+G_1(s)G_2(s)H(s)\right]C_D(s)=G_2(s)D(s)$$

$$\frac{C_D(s)}{D(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

擾乱を考慮した閉ループシステム

- 制御目標と擾乱の同時入力に対する応答

$$C_R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)$$

$$C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\left[G_1(s)R(s) + D(s)\right]$$

擾乱を考慮した閉ループシステム

- 閉ループ系で擾乱の影響が小さくなる条件

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \to 0$$

$$|G_1(s)H(s)| >> 1 \qquad |G_1(s)G_2(s)H(s)| >> 1$$

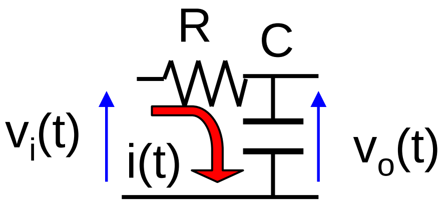
- システムの応答G_1,G_2に制御出力が影響を受けなくなる条件

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \to \frac{1}{H(s)}$$

$$|G_1(s)G_2(s)| >> 1 \quad \Rightarrow \quad |G_1(s)G_2(s)H(s)| >> 1$$

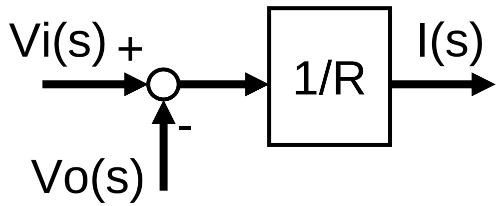
ブロック線図の作り方と伝達関数表現

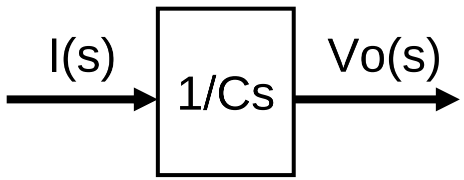
- RC回路の例

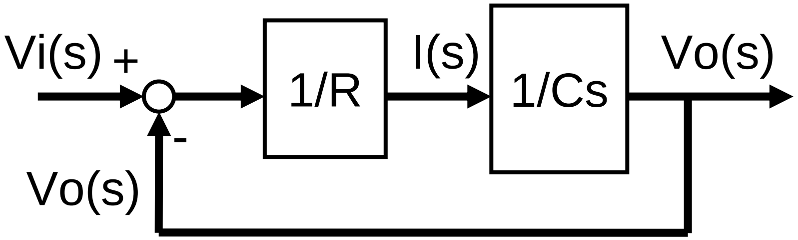


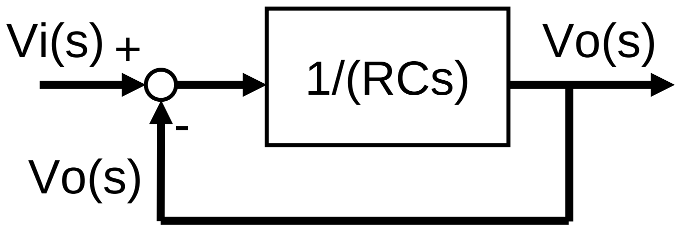
$$\begin{cases} v_i(t) = Ri(t) + v_0(t) \\ v_o(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_i(s) - V_0(s) = RI(s) \\ V_o(s) = \dfrac{I(s)}{sC} \end{cases}$$





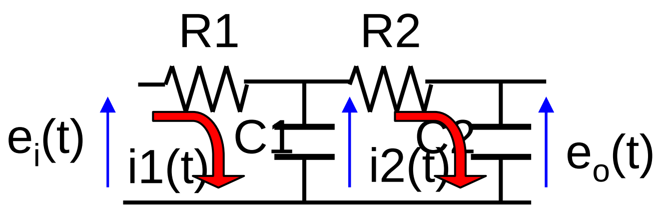




$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sCR}$$

電気回路の伝達関数表現例

- 直列接続された回路



$$
\begin{cases}
e_i(t) = R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt \\
\dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt = R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2 dt \\
e_o(t) = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
E_i(s) = R_1 I_1(s) + \dfrac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] \\
\dfrac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] = R_2 I_2(s) + \dfrac{1}{C_2 s} I_2(s) \\
E_o(s) = \dfrac{1}{C_2 s} I_2(s)
\end{cases}
$$

電気回路の伝達関数表現例

第3式
$$I_2(s) = E_o(s) C_2 s$$

第2式
$$\frac{1}{C_1 s} I_1(s) = \left[\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right] I_2(s)$$

$$I_1(s) = \left[1 + R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2}\right] I_2(s) = \left[1 + R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2}\right] E_o(s) C_2 s$$
$$= \left[C_2 s + R_2 C_1 C_2 s^2 + C_1 s\right] E_o(s)$$
$$= \left[R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2) s\right] E_o(s)$$

第1式に代入
$$E_i(s) = \left[R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right] I_1(s) - \frac{1}{C_1 s} I_2(s)$$
$$= \left[R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right]\left[R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2) s\right] E_o(s) - \frac{1}{C_1 s} E_o(s) C_2 s$$
$$= \frac{R_1 C_1 s + 1}{C_1 s}\left[R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2) s\right] E_o(s) - \frac{C_2}{C_1} E_o(s)$$

電気回路の伝達関数表現例

つづき

$$E_i(s)=\left\{\frac{R_1C_1s+1}{C_1}\left[R_2C_1C_2s+C_1+C_2\right]-\frac{C_2}{C_1}\right\}E_o(s)$$

$$=\left\{[R_1C_1s+1][R_2C_2s+1]+[R_1C_1s+1]\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_2}{C_1}\right\}E_o(s)$$

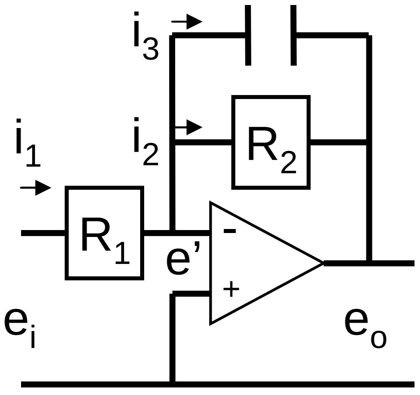
$$=\{[R_1C_1s+1][R_2C_2s+1]+R_1C_2s\}E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

$$=\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

反転増幅回路

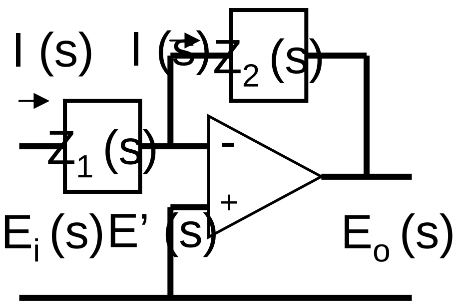
$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1} \qquad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2} \quad i_3 = C\frac{d}{dt}\left(e' - e_o\right)$$



$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2} + C\frac{d}{dt}\left(e' - e_o\right)$$

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2} - C\frac{d}{dt}e_o \qquad\qquad e' \to 0$$



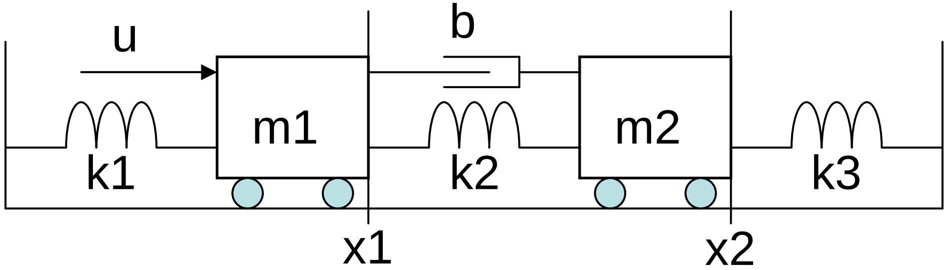
$$\frac{E_i(s)}{R_1} = \frac{-E_o(s)}{R_2} - CsE_o(s) = -\frac{1 + R_2Cs}{R_2}E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}$$

おまけ

機械系の伝達関数表現例

- ばね質量系



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = b\dot{x}_2 + k_2x_2 + u \\ m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x}_1 + k_2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)\right]X_1(s) = (bs + k_2)X_2(s) + U(s) \\ \left[m_2s^2 + bs + (k_2 + k_3)\right]X_1(s) = (bs + k_2)X_1(s) \end{cases}$$

機械系の伝達関数表現例

- ばね質量系

$$\left[\left(m_1s^2+bs+k_1+k_2\right)\left(m_2s^2+bs+k_2+k_3\right)-\left(bs+k_2\right)^2\right]X_1(s)$$
$$=\left(m_2s^2+bs+k_2+k_3\right)U(s)$$

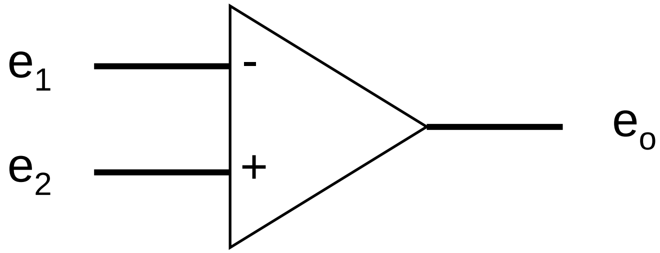
$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{m_2s^2+bs+k_2+k_3}{\left(m_1s^2+bs+k_1+k_2\right)\left(m_2s^2+bs+k_2+k_3\right)-\left(bs+k_2\right)^2}$$

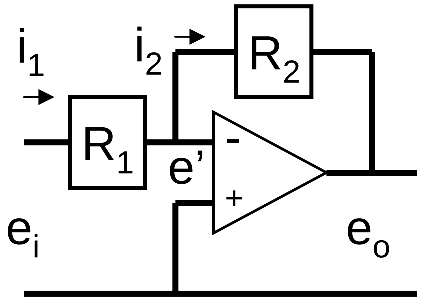
$$\frac{X_2(s)}{U(s)}=\frac{bs+k_2}{\left(m_1s^2+bs+k_1+k_2\right)\left(m_2s^2+bs+k_2+k_3\right)-\left(bs+k_2\right)^2}$$

オペアンプ回路

- 入力インピーダンス無限大
- 出力インピーダンス0
- 電圧ゲインK

$$e_o = K(e_2 - e_1)$$





反転増幅回路

- オームの法則

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1} \qquad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

- 入力インピーダンス∞

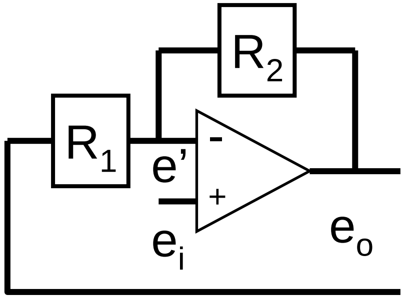
$$i_1 \cong i_2 \qquad \frac{e_i - e'}{R_1} \cong \frac{e' - e_o}{R_2}$$

- ゲイン大　$e' \to 0$

K>>1なのでe’=0でないとK(0-e’)=eoが破綻

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

- 入出力の関係　$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$



非反転増幅回路

- -端子電圧

$$e' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o$$

- 増幅

$$e_o = K(e_i - e') = K\left(e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o\right)$$

- ゲイン大

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K}\right) e_o \cong \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o$$

- 入出力の関係

$$e_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e_i$$