制御工学I　第7回
過渡特性2

平成22年5月31日

授業の予定

- 制御工学概論（１回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（１回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（３回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（３回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（２回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（４回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

二次のシステムの応答

- 閉ループ伝達関数の標準形

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

- 非減衰固有周波数:ωn
- 減衰比:ζ
  - 臨界制動Bcに対する粘性抵抗Bの比
  - 減衰固有周波数 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

二次のシステムの応答
弱制動ステップ応答

- 弱制動の単位ステップ入力に対する応答

$$C(s) = \frac{\omega_n{}^2}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2\right)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d{}^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d{}^2}$$

$$L^{-1}\left[C(s)\right] = c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \theta\right)$$

ただし　$\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}, \cos\theta = \zeta$

二次のシステムの応答
弱制動ステップ応答

- 入出力の誤差

$$
\begin{aligned}
e(t) &= r(t) - c(t) \\
&= 1 - \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right) \right\} \\
&= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right)
\end{aligned}
$$

減衰正弦波。t=∞で誤差は無くなる。

二次のシステムの応答
非減衰ステップ応答

- 減衰の無い場合ζ=0　$C(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+\omega_n{}^2}$
  - 応答は固有周波数での非減衰振動となる
  - 出力　$c(t)=1-\cos\omega_n t$
    - 現実的にはζ=0とはならないので，非減衰の固有周波数ωnは観測できない
    - 観測できるのは減衰固有周波数ωd

$$\omega_n{}^2=(\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 非減衰の固有周波数より低い
- 減衰が増えると周波数は低下する
- 減衰ζが一を超えると過制動となる振動しない

二次のシステムの応答
臨界制動ステップ応答

- 臨界制動(ζ=1)
  - 伝達関数の二つの極が等しい
  - 単位ステップ入力R(s)=1/sに対する応答

$$C(s)=\frac{{\omega_n}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

- ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[\frac{{\omega_n}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}\right]=1-e^{-\omega_n t}-e^{-\omega_n t}\omega_n t=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

二次のシステムの応答
臨界制動ステップ応答

- 臨界制動(ζ=1)

$$L^{-1}\left[\frac{{\omega_n}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}\right]=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

- 弱制動の極限としての臨界制動ζ→1

$$\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t=\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$$

$$=\lim_{\zeta\to 1}\zeta\omega_n t\frac{\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}=\omega_n t$$

二次のシステムの応答
臨界制動ステップ応答

- 弱制動の極限をとるζ→1

$$\lim_{\zeta \to 1} c(t) = \lim_{\zeta \to 1} 1 - e^{-\zeta \omega_n t}\left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t\right)$$

$$= 1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)$$

一致する

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 過制動(ζ>1)
  - 伝達関数の二つの極が実負で異なる
  - 単位ステップ入力R(s)=1/sに対する応答

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2\right)}\frac{1}{s}$$

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2 \Rightarrow s=-\zeta\omega_n \pm\sqrt{(\zeta\omega_n)^2-\omega_n{}^2}$$

$$=-\zeta\omega_n \pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$$=-\left(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

$$C(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{\left[s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]\left[s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{s}$$

- 部分分数の係数を求める

$$\left[s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]C(s)\Big|_{s=-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{\omega_n^{\ 2}}{\left[-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

$$\left[s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]C(s)\Big|_{s=-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{\left[-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$sC(s)\Big|_{s=0}=\frac{\omega_n{}^2}{\left[0+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]\left[0+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}$$

$$=\frac{1}{\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{1}{\zeta^2-\left(\zeta^2-1\right)}=1$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 部分分数展開

$$C(s)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{\dfrac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{\dfrac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}\right]+\frac{1}{s}$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{\frac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{\frac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}\right]\right]=$$

$$=1+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

- 定数項と二つの単調減衰項で構成される

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 減衰係数ζが1よりかなり大きい場合
  – 指数関数的に減衰する二つの減衰項のうち一方は，もう一方に比べかなり早く減衰する
    - 早く減衰する方の振る舞いは無視できる

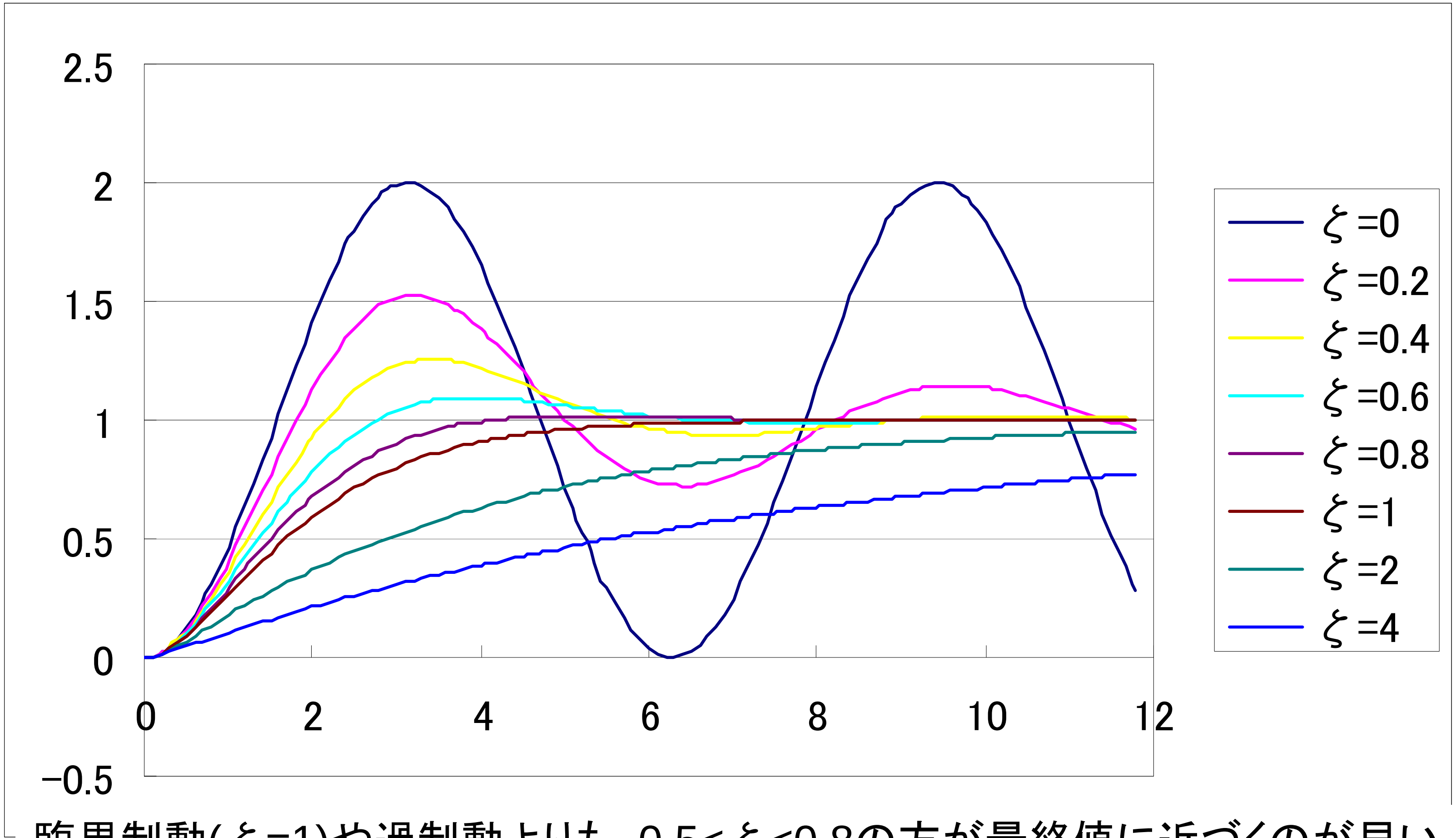
$$s_1 = \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), s_2 = \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right]$$

      – -s1に比べ,-s2が虚軸に近いなら-s1の項は無視できる

  – 早く減衰する項が収束した後，一次のシステムの応答で近似できる

二次のシステムの応答
ステップ応答



臨界制動(ξ=1)や過制動よりも，0.5<ξ<0.8の方が最終値に近づくのが早い

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 二次システムの応答の一次システムの応答での近似

$$c(t)=1+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1}-\frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right]$$

  - 二次システムの応答
    - 初期値:0
    - 終端値:1
  - 一次システムでの近似(s1無視)

$$C(s)=\frac{k}{s(s+s_2)}$$

    - 係数kを求める

$$sC(s)\big|_{s=0}=\frac{k}{0+s_2}=\frac{k}{s_2}\qquad [s+s_2]C(s)\big|_{s=-s_2}=\frac{k}{-s_2}$$

$$C(s)=\frac{k}{s_2}\frac{1}{s}-\frac{k}{s_2}\frac{1}{s+s_2}$$

二次のシステムの応答
ステップ応答

- 一次システムのラプラス逆変換

$$c(t) = \frac{k}{s_2} - \frac{k}{s_2} e^{-s_2 t}$$

  – 初期値:0→一致

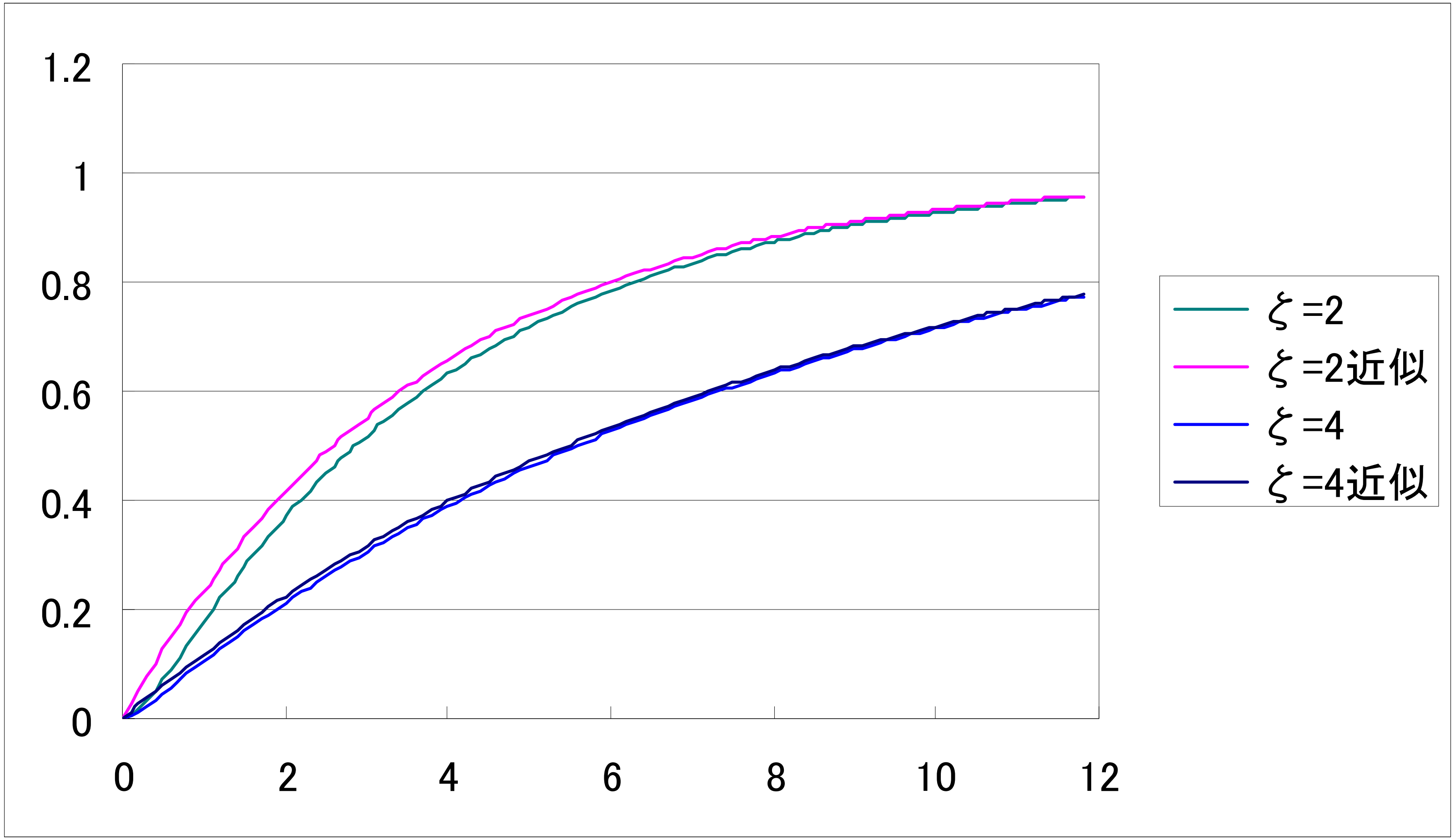
  – 終端値一致させる $\frac{k}{s_2} = 1 \qquad k = s_2$

$$c(t) = 1 - e^{-s_2 t}$$

$$C(s) = \frac{s_2}{s(s+s_2)} = \frac{\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}{s\left(s + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right)}$$

- 近似した伝達関数 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s_2}{s+s_2} = \frac{\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}{s + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$

二次のシステムの応答
ステップ応答



ステップ応答

- 単位ステップ入力に対する応答の評価基準
  - 遅延時間:t_d
    - 最終値の半分の値に至る時間
  - 立ち上がり時間:tr
    - 10%→90%(過制動)，5%→95%，0%→100%(弱(不足)制動)
  - ピーク時間:tp(過制動には無い)
    - オーバーシュートにおける最初のピークの時間
  - 最大行き過ぎ量:Mp(過制動には無い)
    - 相対的な安定性を示す

$$M_p(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

  - 整定時間:ts
    - 最終値の2%または5%に値が収まる時間
    - 制御系の最も時定数の長いものに関係する

ステップ応答