

制御工学I 第9回 過渡特性残り 安定性

平成22年6月14日

授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

二次のシステムのインパルス応答

- 二次のシステム $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

- 単位インパルス入力: $r(t)$

- ラプラス変換: $R(s) = 1$

- 単位インパルス応答は単位ステップ応答の微分に相当

- 過制動 ($\zeta > 1$) の応答

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\left[s + \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] \left[s + \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right]}$$

二次のシステムのインパルス応答

過制動($\zeta > 1$)

部分分数分解

$$\begin{aligned} \left[s + \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] C(s) \Big|_{s = -\omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} &= \frac{\omega_n^2}{-\omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \\ &= \frac{\omega_n}{-2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[s + \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] C(s) \Big|_{s = -\omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} &= \frac{\omega_n^2}{-\omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

二次のシステムのインパルス応答

過制動($\zeta > 1$)

部分分数分解の結果

$$C(s) = \frac{-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + \frac{\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$c(t) = -\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

$$= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} - e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right\}$$

$$= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n t} \left\{ e^{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - e^{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right\}$$

過制動($\zeta > 1$)では $c(t) > 0$ となる
 $0 < \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

二次のシステムのインパルス応答

- 臨界制動($\zeta=1$)

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$= \omega_n^2 \left(\frac{1}{s + \omega_n} \right)^2$$

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad c(t) > 0 \text{となる}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

二次のシステムのインパルス応答

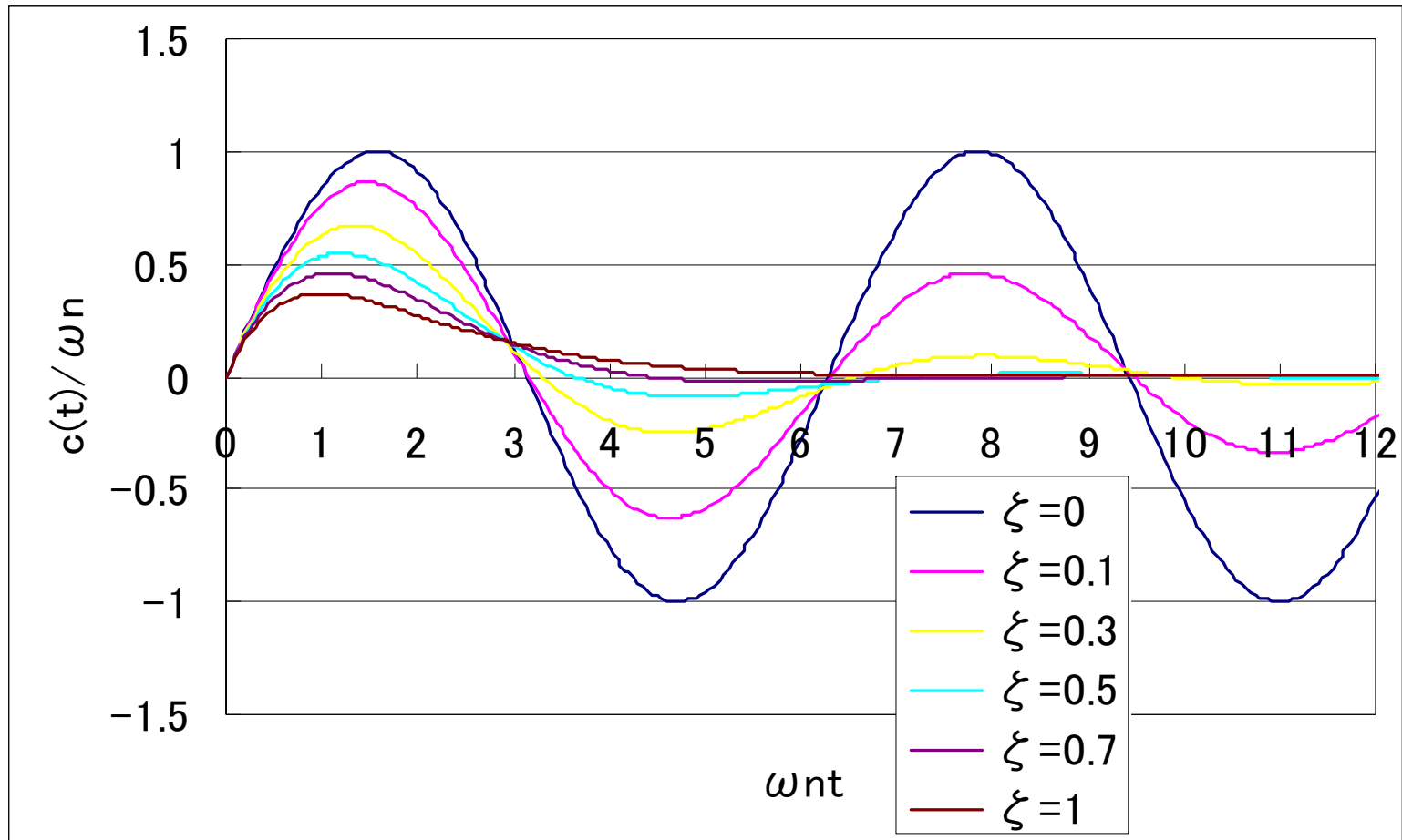
- 弱制動($0 \leq \zeta < 1$)

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \end{aligned}$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t$$

弱制動では振動的となる(負値もとる)

二次のシステムのインパルス応答



二次のシステムのインパルス応答

- 過制動・臨界制動時は $c(t)$ の符号は変化なし
 - この時ステップ応答はオーバシュートを生じない
 - 単調減少で収束する
- 弱制動における最大オーバシュート
 - 極値をとる t_p

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right]$$
$$= 0$$

二次のシステムのインパルス応答

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(t) &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\begin{array}{l} -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \\ + \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \end{array} \right] \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left[\begin{array}{l} -\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \\ + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \end{array} \right]\end{aligned}$$

$$-\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = 0$$

$$\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t$$

$$\frac{\sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t}{\cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} = \tan \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 極値をとる時間 t_p

$$\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$t_p = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 最大オーバシュート量 $M_p, C(tp)$

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right) &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\zeta}} \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right] \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \left[\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right] \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta^2 + \zeta^2} \end{aligned}$$

二次のシステムのインパルス応答

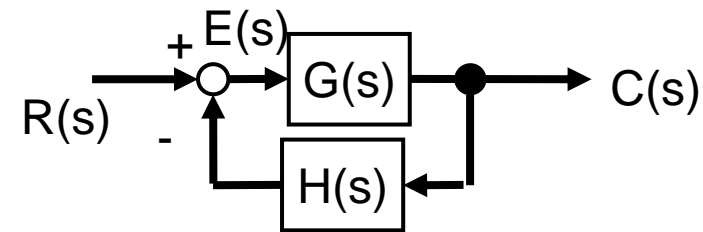
- 最大オーバシュート量

$$c \left(\frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}$$

最初にC(t)=0となるtは、単位ステップ応答におけるtpに一致

制御システムの安定性

- フィードバック制御システムのブロック線図



– システムの伝達関数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

– システムの時間応答 (伝達関数の特性方程式)

- 重根なし

$$c(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + \dots + a_n e^{b_n t}$$

- 重根あり

$$c(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + \dots + a_m e^{b_m t} +$$

$$t^{c_1} a_{m+1} e^{b_{m+1} t} + \dots + t^{c_{n-m}} a_n e^{b_n t}$$

制御システムの安定性

- 各項の時間応答(振る舞い) $a_i e^{b_i t}, t^{c_i} a_i e^{b_i t}$
 - b_i の実数部が負 → 時間と共に減衰
 - 実数 → 単調減少, 複素数 → 減衰振動
 - b_i が虚数 → $a_i e^{b_i t}$ は一定振幅の振動が持続
 - b_i の実数部が正 → 時間と共に増大
 - 実数 → 単調増加, 複素数 → 発散振動

制御システムの安定性

- システムの時間応答の振る舞い
 - システムの応答は各項の和 $a_i e^{b_i t}, t^{c_i} a_i e^{b_i t}$
 - 全ての b_i の実数部が負
 - 各項がすべて時間と共に減衰
 - $t \rightarrow \infty$ で $c(t) \rightarrow 0$ となる → 安定
 - 虚数の b_i と実数部が負の b_i $a_i e^{b_i t}$
 - 虚数項における一定振幅の振動が持続 → 安定限界
 - 実数部が正の b_i が含まれる
 - b_i が正の実部を持つ項が $t \rightarrow \infty$ で発散
 - $t \rightarrow \infty$ で $c(t) \rightarrow \infty$ となる → 不安定
 - 実数 → 単調増加, 複素数 → 発散振動

制御システムの安定性

- システム全体の振る舞い
 - 安定
 - 目標値に対して制御量が速やかに収束
 - 外乱に対しても, 除去されれば元に復帰
 - 入力に対して所定の出力に収束する
 - 不安定
 - 安定ではない状態

リアプノフ安定性

- $\dot{x} = 0$ (微分量が0)とする状態 $x_e \rightarrow$ 平衡状態
 - x_e 平衡点
- 平衡点に摂動を与えた系の解 $x(t, x_0, t_0)$ の時間経過を考える。ただし, x_0, t_0 は初期値。
- 定義 $\|x_0 - x\| \leq \delta$ ならば, 全ての $t \geq t_0$ に対して $\|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \leq a$ となるような実数 a が存在すれば, 平衡点 x_e は安定。存在しなければ不安定。
 - 平衡点 x_e が安定かつ, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$ のとき x_e は漸近安定。

漸近安定

