エネルギーシステム論
第7回
EDLCのモデル化

準定常モデル

平成22年12月10日

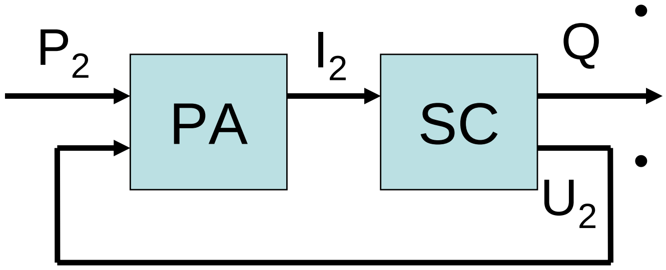
電気二重層コンデンサ

- 電気化学二重層の電界にエネルギーを貯蔵
- 出力電力密度
  - 電池より大
- エネルギー密度
  - 電池よりかなり小さい
- 用途
  - 小　メモリバックアップ
  - 大　登坂時のパワーアシスト，回生制動
  - 電池に対する負荷平準化
- 構造
  - 導体間にイオン伝導性電解質を挟んだ誘電体
  - 電極と電解質を隔てる層中で生じる電荷分離によりエネルギーをためる
  - 印加電圧は電解質の物理的性質により数V以下に限られる
  - 静電容量を増やし蓄積エネルギーを増加させる
    - 表面積拡大
    - 厚さ減少

電気二重層コンデンサ

- 表面積の拡大
  - 電極に多孔質材料を利用
  - 表面積の大きい電極材料
    - 活性炭($10^3 m^2/g$)
      - 多孔質炭素電極は電荷を集める金属板に接続
    - 金属酸化物(ルテニウム，イリジウム)
- セパレータ（イオン交換膜）で電極を絶縁分離
  - セパレータで電解液を貯蔵・固定化
    - 電解液は酸性水溶液，多孔質に埋まる事の可能な有機物
- 500～2500W/kg，0.2-5Wh/kg

EDLCのモデル化
準定常（静特性）モデル



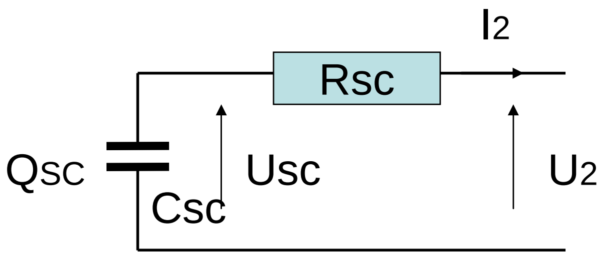
- 入力変数
  - 端子出力電力$P_2(t)$
- 出力変数
  - 蓄積電荷量$Q(t)$
    - 定格容量Q_0
- 内部変数
  - 端子電圧$U_2(t)$
  - 端子電流$I_2(t)$

$$I_2(t) = \frac{P_2(t)}{U_2(t)}$$

- SOCは端子電流I_2と容量Q_0から求まる

EDLCの準定常モデル 等価回路

- 電池の等価回路
  - コンデンサC_{SC}
  - 内部直列抵抗R_{SC}
  - 抵抗，多孔質電極中の蓄積電荷の分布的性質を考えると複雑なモデルになる



EDLCの準定常モデル 等価回路

- 等価回路の回路方程式
  - KVL

$$U_{sc}(t) - R_{sc} I_2(t) = U_2(t) \Rightarrow U_2(t) + R_{sc} I_2(t) - U_{sc}(t) = 0$$

  - 微分方程式

$$I_2(t) = -\frac{d}{dt} Q_{sc}(t)$$

  - 線形なC_{sc}

$$U_{sc}(t) = \frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}$$

EDLCの準定常モデル 等価回路

- 端子電圧を充電電荷の関数として表す
  - I_2,U_{SC}消す

$$U_2(t)+R_{sc}I_2(t)-U_{sc}(t)=U_2(t)+R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)}-\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}=0$$

$$U_2(t)^2-\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}U_2(t)+R_{sc}P_2(t)=0$$

$$U_2(t)=\frac{\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}\pm\sqrt{\left(\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}\right)^2-4R_{sc}P_2(t)}}{2}=\frac{Q_{sc}(t)}{2C_{sc}}\pm\sqrt{\frac{Q_{sc}(t)^2}{4C_{sc}{}^2}-R_{sc}P_2(t)}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率

- 大域的な充放電効率
  - 完全充放電サイクルで定義
    - 充電エネルギーに対する放電エネルギーの比
    - 充放電状態に依存する
      - 定電流充放電　Peukert test
      - 定電力充放電　Ragone test
  - EDLCのR,Cが一定(線形モデル)の仮定

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電流Peukert試験)

- 放電
  - 初期充電電荷量Q_0
  - 空乏化に要する時間 $t_f = \dfrac{Q_0}{I_2}$
  - 電荷の時間変化 $Q_{sc}(t) = Q_0 - I_2 t$
  - 端子電圧 $U_2(t) = \dfrac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - R_{sc}\dfrac{P_2(t)}{U_2(t)}$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電流Peukert試験)

- 放電電力量

$$E_d = \int_0^{t_f} U_2(t) I_2 dt = \int_0^{t_f}\left[\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)}\right] I_2 dt$$

$$= \int_0^{t_f}\left[\frac{Q_0 - I_2 t}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{U_2(t) I_2}{U_2(t)}\right] I_2 dt = \int_0^{t_f}\left[-\frac{I_2}{C_{sc}}t + \frac{Q_0}{C_{sc}} - R_{sc} I_2\right] I_2 dt$$

$$= \left[-\frac{I_2}{C_{sc}}\frac{t^2}{2} + \left\{\frac{Q_0}{C_{sc}} - R_{sc} I_2\right\} t\right]_0^{t_f} = I_2\left[-\frac{I_2}{C_{sc}}\frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{I_2}\right)^2 + \left\{\frac{Q_0}{C_{sc}} - R_{sc} I_2\right\}\frac{Q_0}{I_2}\right] I_2$$

$$= \left[-\frac{{Q_0}^2}{2C_{sc} I_2} + \frac{{Q_0}^2}{I_2 C_{sc}} - R_{sc} Q_0\right] I_2 = \frac{{Q_0}^2}{2C_{sc}} - R_{sc} Q_0 I_2$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電流Peukert試験)

- 充電
  - 充電電流 $I_2 = -I_c$
  - 充電に要する時間 $t_f = \dfrac{Q_0}{|I_2|}$
  - 電荷の時間変化 $Q_{sc}(t) = |I_2| t$
  - 端子電圧 $U_2(t) = \dfrac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - R_{sc} \dfrac{P_2(t)}{U_2(t)}$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電流Peukert試験)

- 充電電力量

$$E_c = \int_0^{t_f} U_2(t)|I_2|dt = \int_0^{t_f}\left[\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)}\right]|I_2|dt$$

$$= \int_0^{t_f}\left[\frac{|I_2|t}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{U_2(t)|I_2|}{U_2(t)}\right]|I_2|dt = \int_0^{t_f}\left[\frac{|I_2|t}{C_{sc}} + R_{sc}\frac{U_2(t)I_2}{U_2(t)}\right]|I_2|dt$$

$$= \int_0^{t_f}\left[\frac{|I_2|}{C_{sc}}t + R_{sc}I_2\right]|I_2|dt = \left[\frac{|I_2|}{C_{sc}}\frac{t^2}{2} + R_{sc}I_2 t\right]_0^{t_f}|I_2|$$

$$= \left[\frac{|I_2|}{C_{sc}}\frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{I_2}\right)^2 + R_{sc}I_2\frac{Q_0}{I_2}\right]|I_2| = \left[\frac{{Q_0}^2}{2I_2C_{sc}} + R_{sc}Q_0\right]|I_2|$$

$$= \frac{{Q_0}^2}{2C_{sc}} + R_{sc}Q_0|I_2|$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電流Peukert試験)

- 充放電効率

$$\eta_{sc} = \frac{E_d}{E_c} = \frac{\dfrac{{Q_0}^2}{2C_{sc}} - R_{sc}Q_0I_2}{\dfrac{{Q_0}^2}{2C_{sc}} + R_{sc}Q_0\left|I_2\right|} = \frac{Q_0 - 2R_{sc}C_{sc}I_2}{Q_0 + 2R_{sc}C_{sc}\left|I_2\right|}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 放電
  - 放電終了条件を求める(P_2により変わる)
    - 定電力(P_2)を出す事ができなくなった時点 =出力電力の最大値(極値)がP_2
      - 極値をとる条件 $\dfrac{dP_2}{dI_2(t)} = 0$

$$\frac{dP_2}{dI_2(t)} = \frac{d}{dI_2(t)}\left[U_2(t)I_2(t)\right] = \frac{d}{dI_2(t)}\left[\left\{\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - R_{sc}I_2(t)\right\}I_2(t)\right]$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき $$\frac{dP_2}{dI_2(t)} = \frac{d}{dI_2(t)}\left[\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} I_2(t) - R_{sc} I_2(t)^2\right]$$
$$= \frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - 2R_{sc} I_2(t)$$
$$= 0$$
  - 出力最大時の電流 $$\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}} - 2R_{sc} I_2(t) = 0$$
$$I_2(t) = \frac{Q_{sc}(t)}{2R_{sc}C_{sc}}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 境界条件
  - 放電終了時t_fの電力がP_2に等しい

$$P_2 = U_2(t_f) I_2(t_f)$$
$$= \left\{\frac{Q_{sc}(t_f)}{C_{sc}} - R_{sc} I_2(t_f)\right\} I_2(t_f)$$
$$= \left\{\frac{Q_{sc}(t_f)}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{Q_{sc}(t_f)}{2R_{sc}C_{sc}}\right\}\frac{Q_{sc}(t_f)}{2R_{sc}C_{sc}}$$
$$= \left\{\frac{Q_{sc}(t_f)}{C_{sc}} - \frac{Q_{sc}(t_f)}{2C_{sc}}\right\}\frac{Q_{sc}(t_f)}{2R_{sc}C_{sc}}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

$$P_2 = \frac{Q_{sc}(t_f)}{2C_{sc}} \frac{Q_{sc}(t_f)}{2R_{sc}C_{sc}} = \frac{Q_{sc}(t_f)^2}{4R_{sc}C_{sc}^2}$$

– 放電終了時の残存電荷

$$Q_{sc}(t_f)^2 = 4R_{sc}C_{sc}^2 P_2$$

$$Q_{sc}(t_f) = 2C_{sc}\sqrt{R_{sc}P_2}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 放電終了時の端子電圧

$$U_2(t_f) = \frac{Q_{sc}(t_f)}{C_{sc}} - R_{sc}I_2(t_f)$$

$$= \frac{Q_{sc}(t_f)}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{Q_{sc}(t_f)}{2R_{sc}C_{sc}} = \frac{2C_{sc}\sqrt{R_{sc}P_2}}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{2C_{sc}\sqrt{R_{sc}P_2}}{2R_{sc}C_{sc}}$$

$$= 2\sqrt{R_{sc}P_2} - \sqrt{R_{sc}P_2}$$

$$= \sqrt{R_{sc}P_2}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 放電終了時点を求める
  - 端子電圧U_2の微分方程式の解を求める
    - 充電電圧の境界条件U_0,$U(t_f)$を用いて求める
    - KVL $$U_2(t)-\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}+R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)}=0$$
      - 時間微分 $$U_2(t)^2-\frac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}U_2(t)+R_{sc}P_2(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2-\frac{1}{C_{sc}}\frac{d}{dt}\left[Q_{sc}(t)U_2(t)\right]+R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2-\frac{1}{C_{sc}}\left[U_2(t)\frac{d}{dt}Q_{sc}(t)+Q_{sc}(t)\frac{d}{dt}U_2(t)\right]+R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t)=0$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

$$\frac{d}{dt}Q_{sc}(t)=-I_2(t)$$

$$U_{sc}(t)=R_{sc}I_2(t)+U_2(t)$$

$$Q_{sc}(t)=C_{sc}U_{sc}(t)=C_{sc}\left[R_{sc}I_2(t)+U_2(t)\right]$$

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2-\frac{1}{C_{sc}}\left[U_2(t)\{-I_2(t)\}+C_{sc}\left[R_{sc}I_2(t)+U_2(t)\right]\frac{d}{dt}U_2(t)\right]+R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t)$$

$$=\frac{d}{dt}U_2(t)^2-\frac{1}{C_{sc}}\left[-P_2(t)+C_{sc}\left[R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)}+U_2(t)\right]\frac{d}{dt}U_2(t)\right]+R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t)$$

$$=0$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2 = 2U_2(t)\frac{d}{dt}U_2(t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}U_2(t) = \frac{1}{2U_2(t)}\frac{d}{dt}U_2(t)^2$$

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2 - \frac{1}{C_{sc}}\left[-P_2(t) + C_{sc}\left[R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)} + U_2(t)\right]\frac{1}{2U_2(t)}\frac{d}{dt}U_2(t)^2\right]$$

$$+R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2 + \frac{1}{C_{sc}}\left[P_2(t) - \frac{C_{sc}}{2}\left[R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)^2} + 1\right]\frac{d}{dt}U_2(t)^2\right] + R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t) = 0$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

$$\frac{d}{dt}U_2(t)^2 + \frac{P_2(t)}{C_{sc}} - \frac{1}{2}\left[R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)^2} + 1\right]\frac{d}{dt}U_2(t)^2 + R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t) = 0$$

$$\left\{1 - \frac{1}{2}\left[R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)^2} + 1\right]\right\}\frac{d}{dt}U_2(t)^2 + \frac{P_2(t)}{C_{sc}} + R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[1 - R_{sc}\frac{P_2(t)}{U_2(t)^2}\right]\frac{d}{dt}U_2(t)^2 = -\frac{P_2(t)}{C_{sc}} - R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t)$$

$$\left[1 - \frac{R_{sc}P_2(t)}{U_2(t)^2}\right]\frac{d}{dt}U_2(t)^2 = -\frac{2P_2(t)}{C_{sc}} - 2R_{sc}\frac{d}{dt}P_2(t)$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

定電力条件 $P_2(t) = P_2 = const$ $\quad \frac{d}{dt}P_2(t) = 0$

$$\left[1 - \frac{R_{sc}P_2}{U_2(t)^2}\right]\frac{d}{dt}U_2(t)^2 = -\frac{2P_2}{C_{sc}}$$

$$X(t) = U_2(t)^2 \quad \text{とおく}$$

$$\left[1 - \frac{R_{sc}P_2}{X(t)}\right]\frac{d}{dt}X(t) = -\frac{2P_2}{C_{sc}}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

境界条件 $t : 0 \to t \qquad X(t) : U_{20}{}^2 \to U_2(t)^2$

$$\int_{U_{20}{}^2}^{U_2(t)^2}\left[1 - \frac{R_{sc}P_2}{X(t)}\right]dX(t) = \int_0^t -\frac{2P_2}{C_{sc}}dt$$

$$\left[X(t) - R_{sc}P_2\log_e X(t)\right]_{U_{20}{}^2}^{U_2(t)^2} = \left[-\frac{2P_2}{C_{sc}}t\right]_0^t$$

$$\left[U_2(t)^2 - R_{sc}P_2\log_e U_2(t)^2\right] - \left[U_{20}{}^2 - R_{sc}P_2\log_e U_{20}{}^2\right] = -\frac{2P_2}{C_{sc}}(t-0)$$

$$U_2(t)^2 - U_{20}{}^2 - R_{sc}P_2\log_e\frac{U_2(t)^2}{U_{20}{}^2} = -\frac{2P_2}{C_{sc}}t$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- つづき

$$t = -\frac{C_{sc}}{2P_2}\left[U_2(t)^2 - U_{20}{}^2 - R_{sc}P_2 \log_e \frac{U_2(t)^2}{U_{20}{}^2}\right]$$

$$= \frac{C_{sc}}{2P_2}\left[R_{sc}P_2 \log_e \frac{U_2(t)^2}{U_{20}{}^2} - U_2(t)^2 + U_{20}{}^2\right]$$

定電力放電の終端値条件　$U_2(t_f) = \sqrt{R_{sc}P_2}$

$$t_f = \frac{C_{sc}}{2P_2}\left[R_{sc}P_2 \log_e \frac{U_2(t_f)^2}{U_{20}{}^2} - U_2(t_f)^2 + U_{20}{}^2\right]$$

$$= \frac{C_{sc}}{2P_2}\left[R_{sc}P_2 \log_e \frac{R_{sc}P_2}{U_{20}{}^2} - R_{sc}P_2 + U_{20}{}^2\right]$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 放電電力量

$$E_d = P_2 t_f = P_2 \frac{C_{sc}}{2P_2}\left[R_{sc}P_2 \log_e \frac{R_{sc}P_2}{U_{20}{}^2} - R_{sc}P_2 + U_{20}{}^2\right]$$

$$= \frac{C_{sc}}{2}\left[R_{sc}P_2 \log_e \frac{R_{sc}P_2}{U_{20}{}^2} - R_{sc}P_2 + U_{20}{}^2\right]$$

- 定電力充電
  - 充電電力　$P_c = -P_2$
  - 初期電圧　$U_2(0) = \sqrt{R_{sc}P_2}$
  - 終端電圧　$U_2(t_f) = U_{20}$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 充電電力量

$$\left|E_c\right| = \left|P_c t_f\right|$$

$$= \frac{C_{sc}}{2}\left[R_{sc}\left|P_2\right|\log_e \frac{U_{20}{}^2}{R_{sc}\left|P_2\right|} - R_{sc}\left|P_2\right| + U_{20}{}^2\right]$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率(定電力Ragone試験)

- 定電力充放電効率

$$\eta_{sc} = \frac{E_d}{E_c} = \frac{\dfrac{C_{sc}}{2}\left[R_{sc}P_2\log_e \dfrac{R_{sc}P_2}{U_{20}{}^2} - R_{sc}P_2 + U_{20}{}^2\right]}{\dfrac{C_{sc}}{2}\left[R_{sc}\left|P_2\right|\log_e \dfrac{U_{20}{}^2}{R_{sc}\left|P_2\right|} - R_{sc}\left|P_2\right| + U_{20}{}^2\right]}$$

$$= \frac{R_{sc}P_2\log_e \dfrac{R_{sc}P_2}{U_{20}{}^2} - R_{sc}P_2 + U_{20}{}^2}{R_{sc}\left|P_2\right|\log_e \dfrac{U_{20}{}^2}{R_{sc}\left|P_2\right|} - R_{sc}\left|P_2\right| + U_{20}{}^2}$$

EDLCの準定常モデル 充放電効率

- 電力効率

$$\eta_{sc}(I_2)=\frac{P_{2,d}}{\left|P_{2,c}\right|}=\frac{\left[\dfrac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}-R_{sc}I_2\right]I_2}{\left[\dfrac{Q_{sc}(t)}{C_{sc}}+R_{sc}\left|I_2\right|\right]\left|I_2\right|}$$

$$=\frac{\left[Q_{sc}(t)-C_{sc}R_{sc}\left|I_2\right|\right]I_2}{\left[Q_{sc}(t)+C_{sc}R_{sc}\left|I_2\right|\right]\left|I_2\right|}$$

$$=\frac{Q_{sc}(t)-C_{sc}R_{sc}\left|I_2\right|}{Q_{sc}(t)+C_{sc}R_{sc}\left|I_2\right|}$$