

制御工学I 第13回

周波数特性 ボード線図

平成23年07月04日

2011/07/04

1

授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

2011/07/04

2

周波数伝達関数

- 時間領域信号
 - 入力信号 $x(t)$
 - 出力信号 $y(t)$
- ラプラス変換
 - 入力信号 $X(s)$
 - 出力信号 $Y(s)$
 - 伝達関数 $G(s)=Y(s)/X(s)$
- 周波数伝達関数 $s \rightarrow j\omega$ $G(j\omega)$

2011/07/04

3

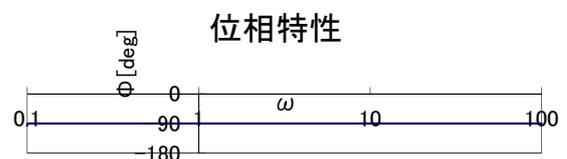
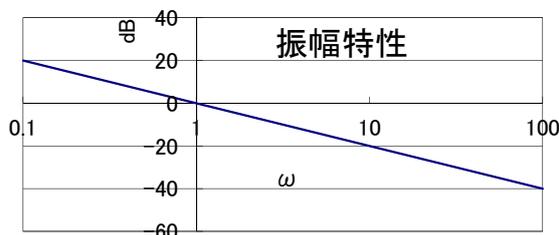
ボード線図 積分

- 積分 $1/j\omega$ のボード線図上での扱い \rightarrow $\boxed{1/S}$ \rightarrow

– 振幅 $20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$

- ボード線図上では直線
 - 周波数が10倍になると
 - $-20 \log 10\omega \text{ [dB]} = -20 \log \omega - 20 \text{ [dB]}$
 - » -20dB/decade

位相 \rightarrow 一定 (90°)

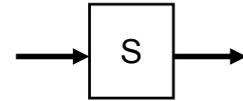


4

ボード線図

微分

- 微分 $j\omega$ のボード線図上での扱い



– 振幅 $20\log|j\omega| = 20\log \omega \text{ dB}$

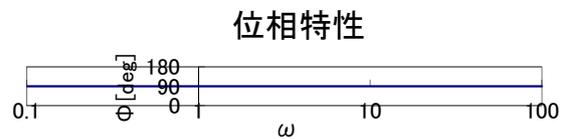
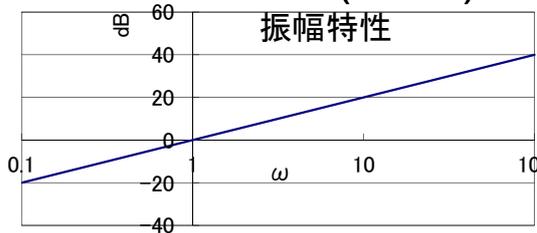
- ボード線図上では直線

– 周波数が10倍になると

$$20\log 10\omega [\text{dB}] = 20\log \omega + 20 [\text{dB}]$$

» 20dB/decade

– 位相 → 一定(90°)



5

ボード線図

一次のシステム1

- 一次のシステム → $\frac{1}{1+sT}$ → $\frac{1}{1+j\omega T}$

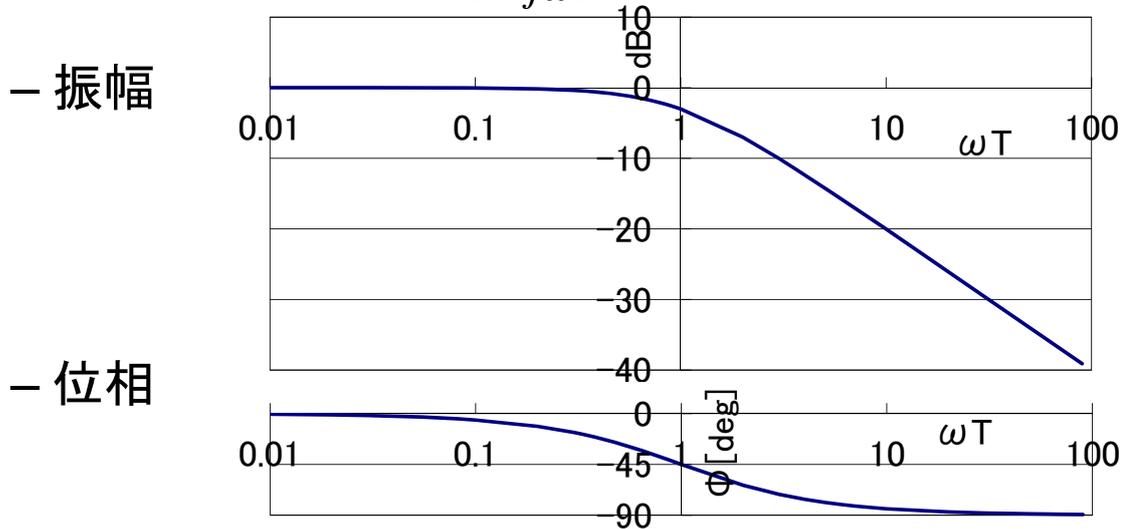
– 振幅 $20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$

– 位相 $\frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}$

$$\tan \phi = \frac{\left|\frac{-j\omega T}{1+(\omega T)^2}\right|}{\left|\frac{1}{1+(\omega T)^2}\right|} = -\omega T \quad \Rightarrow \quad \phi = -\tan^{-1} \omega T$$

ボード線図 一次のシステム2

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$ LPF特性



2011/07/04

ボード線図 一次のシステム3

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$
 - 振幅の性質 $20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$
 - 高周波 ($1 \ll \omega T$) $\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong \omega T$
 - $-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong -20\log\omega T \text{ dB}$
 - 20dB/decade
(周波数が一桁上がると振幅が20dB小さくなる)
 - » 0dB for $\omega=1/T$
 - » -20dB for $\omega=10/T$ 近似

2011/07/04

ボード線図

一次のシステム4

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 振幅の性質

$$20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$$

- 低周波($\omega T \ll 1$) → $\sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong 1$ ほぼ一定

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \cong -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

– 振幅の近似線

- 二つの直線で近似できる
 - 低周波領域 $0 < \omega < 1/T \rightarrow 0 \text{ dB}$
 - 高周波領域 $1/T < \omega < \infty \rightarrow -20 \text{ dB/decade}$
- 折点周波数 $\omega T = 1$ で交わる

2011/07/04

9

ボード線図

一次のシステム5

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 振幅の近似線



折点周波数

2011/07/04

10

ボード線図 一次のシステム6

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 位相の性質

- 折点周波数を中心に奇対称(atan)

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

- 直流 0°

- 折点周波数 -45° $\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{\omega T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$

- $\infty \rightarrow -90^\circ$

2011/07/04

11

ボード線図 一次のシステム7

- 一次のシステム $\frac{1}{1+j\omega T}$

– 振幅の近似線の誤差

- 最大値 \rightarrow 折点周波数($\omega T=1$)

$$-20\log\sqrt{1+1} + 20\log 1 = -\frac{20}{2}\log 2 + 0 = -3.03dB$$

この外では
誤差1dB以下

- 1オクターブ下

$$-20\log\sqrt{\frac{1}{4}+1} + 20\log 1 = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97dB$$

- 1オクターブ上

$$-20\log\sqrt{4+1} + 20\log 2 = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97dB$$

1Decade離れると誤差は-0.04dB以下

2011/07/04

12

ボード線図 一次のシステム8

- 一次のシステムの扱い → $1 + sT$ → $1 + j\omega T$
 - 振幅 → 符号反転

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

- 位相 → 符号反転

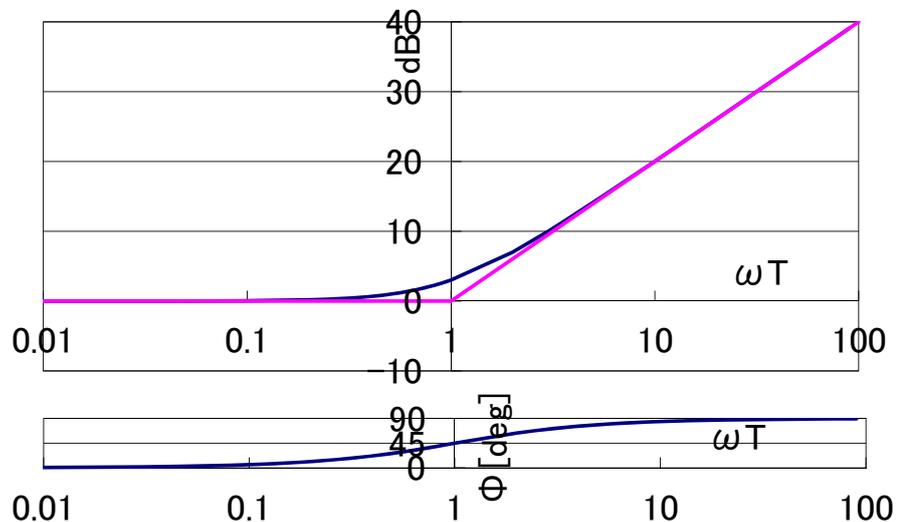
$$\angle 1 + j\omega T = \tan^{-1} \omega T = -\angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$

ボード線図は上下反転

ボード線図 一次のシステム9

- 一次のシステムの扱い $1 + j\omega T$ HPF特性

- 位相84.3° $\omega = 10/T$
- 位相63.4° $\omega = 2/T$
- 位相45° $\omega = 1/T$
- 位相26.6° $\omega = 1/2T$
- 位相5.7° $\omega = 1/10T$



ボード線図は上下反転

ボード線図 n段積分



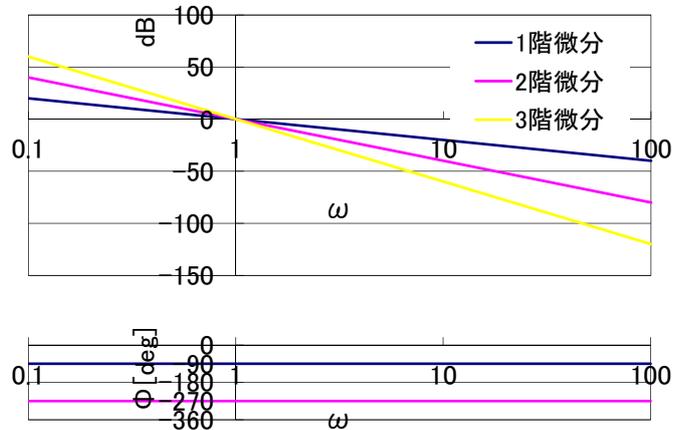
• ボード線図

– 振幅

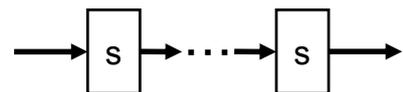
$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n20 \log \omega \text{ dB}$$

- 微分の階数に比例して
振幅の傾きが変化

– 位相 $-90 \times n \text{ (deg)}$



ボード線図 n段微分



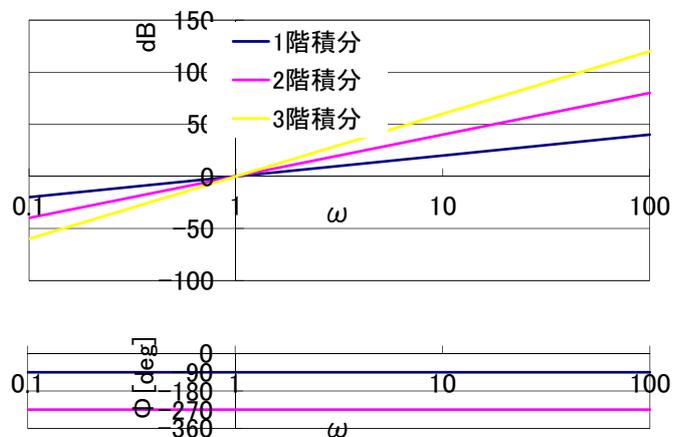
• ボード線図

– 振幅

$$20 \log |(j\omega)^n| = n20 \log \omega \text{ dB}$$

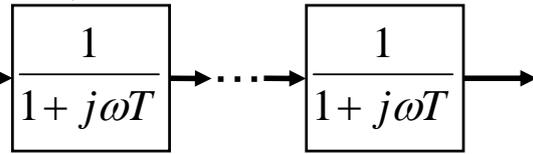
- 積分の階数に比例して
振幅の傾きが変化

– 位相 $90 \times n \text{ (deg)}$



ボード線図 一次のシステム10

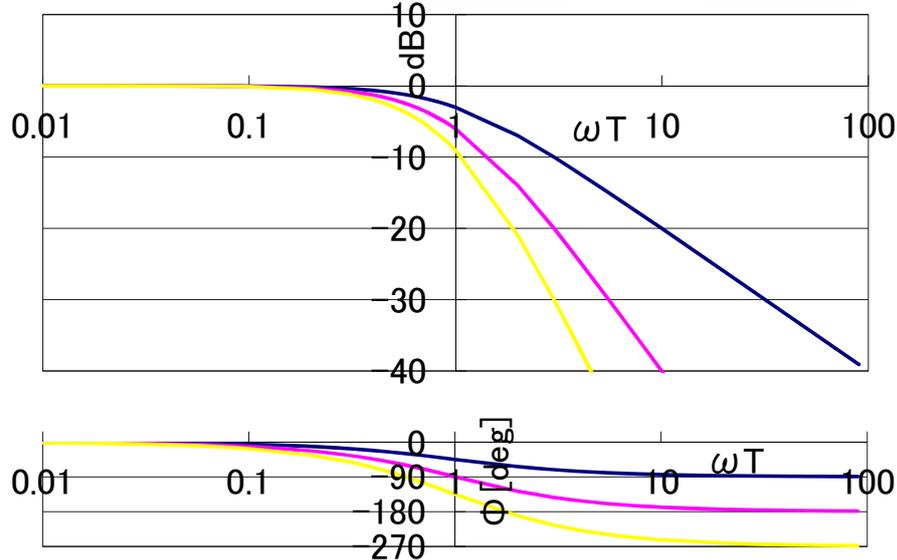
- 一次のシステムn段



- n倍

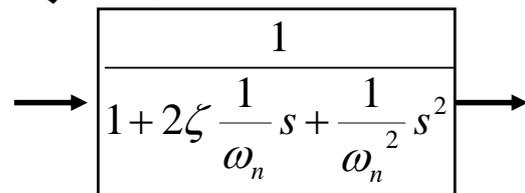
$$\left(\frac{1}{1+j\omega T} \right)^n$$

一次のシステム
のn乗は、
加算で表され
る



ボード線図 二次のシステム1

- 二次のシステム



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

- 減衰比 ζ

- 共振角周波数 $\omega = \omega_n \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \right)^2$

- 判別式(減衰比 ζ)

• $\zeta > 1$: 実根を持つ一次システム $\times 2$

• $0 < \zeta < 1$: 共役複素根を持つ

ボード線図

二次のシステム2

- 二次のシステム $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$
 - 振幅

$$20\log\left|\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\left|1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|$$

$$= -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ dB}$$

2011/07/04

19

ボード線図

二次のシステム3

- 二次のシステムの位相

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}$$

2011/07/04

20

ボード線図 二次のシステム4

- 二次のシステムの位相

$$\phi = \angle \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}$$

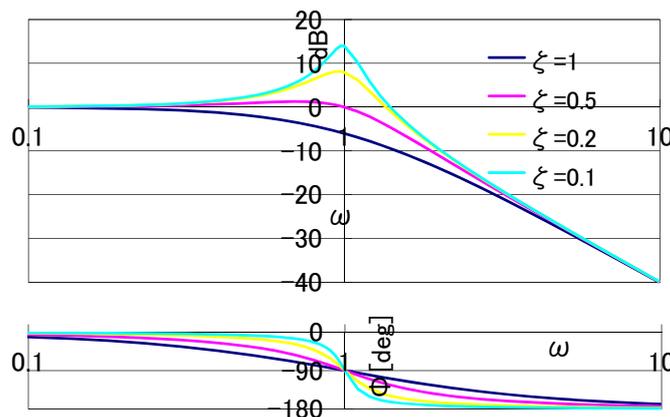
$$= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

2011/07/04

21

ボード線図 二次のシステム5

- 二次のシステム
 - ボード線図
 - ζ が小さいとピークを持つ



2011/07/04

22