応用システム工学
第二回　確率統計の復習

平成24年05月11日

確率分布モデル

- 確率分布モデル
  - 母集団の分布を表す関数
  - 連続数値⇒ヒストグラム⇒区間(階級)
- 離散型確率分布
  - 確率変数が飛び飛びの値をとる
    - 人数，回数等
- 連続型確率分布
  - 確率変数が連続値
    - 身長，体重等

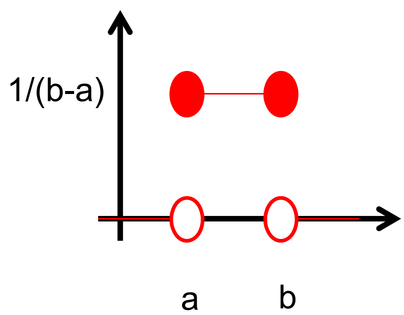
確率密度関数

- 連続型確率分布
  - ある範囲の値をとる確率
    - ヒストグラムの階級の面積
    - ヒストグラムの極限の上端部⇒確率密度関数
- 中心極限定理
  - 無数の独立した原因によるデータの分布の合計は正規分布となる
  - 母集団分布が正規分布ならば，標本平均も正規分布となる

一様分布と確率密度関数

- 一様分布
  - 確率変数Xが区間[a,b]に一様分布
  - 確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \le x \le b) \\ 0 & x < a, b < x \end{cases}$$



正規分布と確率密度関数

- 正規分布
  - 別名ガウス分布
  - 確率変数Xの平均μ, 分散σ^2
  - 確率密度関数

$$f_X\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

標準正規分布と確率密度関数

- 標準正規分布
  - 平均0,分散1の正規分布(確率変数X)
  - 確率密度関数

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$X \sim N\left(0,1\right)$$

正規分布関数の確率密度関数1

- 正規分布の確率密度関数(確率変数X)

$$f_X\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

- 性質
  - 確率密度関数を確率変数の取りうる範囲で積分すると1となる(必ず事象が生じる)
    - 確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

正規分布関数の確率密度関数2

- 変数変換

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$$

$$x=\sigma z+\mu \qquad x:-\infty\leftrightarrow\infty \Leftrightarrow z=:-\infty\leftrightarrow\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x\right)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right]\sigma dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right]dz} \Rightarrow \text{次ページ}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=1$$

正規分布関数の確率密度関数3

- これを求める $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
  - これは偶関数 $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
    - これを求めればよい $2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
      - 変数変換 $x = \frac{z}{\sqrt{2}}$ $\frac{dz}{dx} = \sqrt{2}$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求める $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = I$ とする

正規分布関数の確率密度関数4

- 二重積分を考える

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = I^2$$

  - 変数変換(極形式)

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

    - コーシーリーマン条件

$$dxdy = rdrd\theta$$

$$x, y : 0 \leftrightarrow \infty \Leftrightarrow r : 0 \leftrightarrow \infty, \theta : 0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$$ 第一象限

正規分布関数の確率密度関数5

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty d\theta = \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[0 - (1) \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} = I^2$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 2\sqrt{2} I = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$$

期待値

- 確率変数の平均みたいなもの
- 期待値E[X]
  - 離散分布の確率変数X
    - Xの取り得る値の集合M

$$E[X] = \sum_{x \in M} x P(X = x)$$

  - 連続分布の確率変数X

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

正規分布関数の期待値1

- 正規分布の確率密度関数(確率変数X)

$$f_X\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

- 期待値

$$\begin{aligned}E[X]&=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx\end{aligned}$$

正規分布関数の期待値2

- 変数変換

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}\quad\Rightarrow\quad\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$$

$$x=\sigma z+\mu\qquad x:-\infty\leftrightarrow\infty\Leftrightarrow z=:-\infty\leftrightarrow\infty$$

$$\begin{aligned}E[X]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(z\sigma+\mu)e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\mu\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\right]\end{aligned}$$

正規分布関数の期待値3

- 右辺第一項 $\frac{d}{dz}e^{-\frac{1}{2}z^2} = -\frac{1}{2}2ze^{-\frac{1}{2}z^2} = -ze^{-\frac{1}{2}z^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \left[e^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = e^{-\infty} - e^{-\infty} = 0$$

- 右辺第二項 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \sqrt{2\pi}$

正規分布関数の確率密度関数3参照

- 全体

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma 0 + \mu\sqrt{2\pi}\right]$$

$$= \mu$$

分散

- 確率変数Xのばらつきの程度を表す
- 分散V[X]の定義

$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

分散

- サンプルに対する算出
  - 相加平均 $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
  - 分散 $$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$ 分散は母集団の分散より常に小さい
  - 不偏分散 $$\sigma'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$ バラツキがでるのは二個以上
  - 標準偏差 $$\sigma, \sigma'$$
    - (不偏)分散の平方根

期待値と分散

- 期待値の線形性

$$E[A+B] = E[A] + E[B]$$

- 期待値の線形性を用いた分散σ^2の性質

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V[X] &= E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E\left[X^2\right] - E[X]^2\end{aligned}$$

正規分布関数の分散1

- 正規分布の確率密度関数(確率変数X)

$$f_X\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

- 分散

$$V\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu\right)^2 f_X\left(x\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

正規分布関数の分散2

$$V\left[X\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$-\frac{2\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$+\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

正規分布関数の分散3

- 第3項 正規分布関数の確率密度関数1参照

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$=\mu^2$$

- 第2項 正規分布関数の期待値2参照

$$\frac{-2\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}y\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\frac{-2\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}y\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$=-2\mu^2$$

正規分布関数の分散4

- 第1項
  - 変数変換

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$$

$$x=\sigma z+\mu \qquad x:-\infty\leftrightarrow\infty \Leftrightarrow z=:-\infty\leftrightarrow\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(z\sigma+\mu)^2e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(z^2\sigma^2+2z\sigma\mu+\mu^2\right)e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(z^2\sigma^2+2z\sigma\mu+\mu^2\right)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

正規分布関数の分散5

$$\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} z z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \left[z\left(-e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= [0-0] + \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z^2\sigma^2 + 2z\sigma\mu + \mu^2\right) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma^2\sqrt{2\pi} + 2\sigma\mu \times 0 + \mu^2\sqrt{2\pi}\right)$$

$$= \sigma^2 + \mu^2$$

正規分布関数の分散6

$$V[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$- \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$+ \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \left\{\sigma^2 + \mu^2\right\} + \mu^2 - 2\mu^2 = \sigma^2$$