

# 制御工学I

## 第4回

### 制御システムの モデリングと伝達関数2

平成24年05月07日

2012/05/07

1

## 授業の予定

- 制御工学概論(1回)
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

前回 入力・出力の微分方程式か⇒ラプラス変換⇒伝達関数

2012/05/07

2

# 伝達関数とラプラス変換

- 線形時不変システムの伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

–  $X(s)$ : 入力のラプラス変換  $X(s) = L[x(t)]$

–  $Y(s)$ : 出力のラプラス変換  $Y(s) = L[y(t)]$

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)X(s)]$$

2012/05/07

3

## インパルス関数を入力とした応答

- 単位インパルス入力に対する出力(初期値0)

– 単位インパルス入力  $x(t) = \delta(t)$

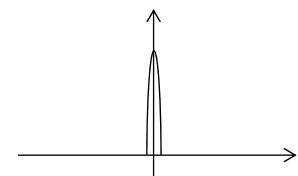
• ラプラス変換  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = 1$

$$Y(s) = G(s)$$

• ただし  $L^{-1}[1] = \delta(t)$

- 伝達関数  $G(s)$  のラプラス逆変換  
→ インパルス応答関数

$$L^{-1}[G(s)] = g(t)$$



幅はないが積分すると1

2012/05/07

4

# 畳み込み積分

- 時間領域の畳み込み積分

- 入力 $x(t)$ に対する応答 $y(t)$ を表す

- 入出力を関連付ける関数 $g(t)$

$$y(t) = \int_0^t g(t-u)x(u)du = \int_0^t g(u)x(t-u)du$$

- 複素領域の乗算と等価

- ただし $g(t)=0, x(t)=0$  for  $t < 0$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)X(s)]$$

$$= g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)x(u)du$$

2012/05/07

5

# 畳み込み積分

- 関数の合成積

- 関数 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \mathcal{L}[g(t)] = G(s)$

- 関数の合成積 $f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$

- ラプラス変換 $\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} f * g(t)e^{-st} dt$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^t f(t-u)g(u)du e^{-st} dt$$

- 積分の順番変える $\Rightarrow$ 積分経路の変更

- $u: 0 \sim t$ の積分,  $t: 0 \sim \infty$ の積分  
 $\Rightarrow t: 0 \sim \infty$ の積分,  $u: t \sim \infty$ の積分

2012/05/07

6

## 畳み込み積分

$$\begin{aligned} \bullet &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)du e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty g(u) \int_t^\infty f(t-u)e^{-st} dt du \\ &= \int_0^\infty g(u) \left[ \int_0^\infty f(t-u)e^{-st} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t f(t-u)e^{-st} dt \right] du \\ &\quad -\mathcal{L}[f(t-u)] = e^{-su}F(s) \text{より} f(t-u) = 0(u < t) \end{aligned}$$

2012/05/07

7

## 畳み込み積分

$$\begin{aligned} \bullet &= \int_0^\infty g(u)[e^{-su}F(s) - 0]du \\ &= \int_0^\infty g(u)e^{-su}F(s)du \\ &= F(s) \int_0^\infty g(u)e^{-su}du \\ &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

2012/05/07

8

# 畳み込み積分

- 特長

- 交換律  $f * g = g * f$
- 結合律  $(f * g) * h = f * (g * h)$
- 分配律  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- スカラー倍  $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$
- 微分  $D(f * g) = Df * g = f * Dg$

- 線形時不変システムの特徴

- 重ね合わせが可能  $\Leftrightarrow$  畳み込み積分

2012/05/07

9

# 畳み込み積分

- 入力を時間間隔 $\Delta t$ でサンプルしたインパルスの和と考える

- 入力信号を時分割された複数のインパルス関数として考える

$$x(t) = x(0)\delta(t) + x(\Delta t)\delta(t - \Delta t) + x(2\Delta t)\delta(t - 2\Delta t) + \dots$$

- システムの伝達関数

- 時間 $\tau$ ずれたインパルス入力に対する応答

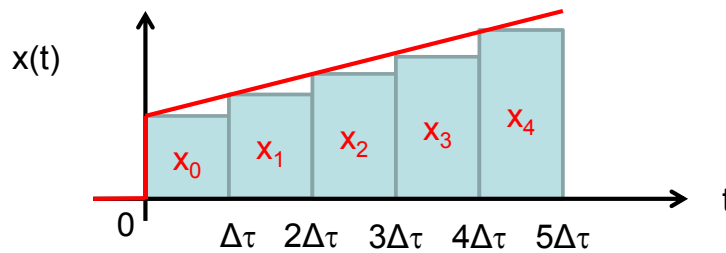
$$g(t - \tau) = \delta(t - \tau)$$

2012/05/07

10

# インパルス応答

- 入力 $x(t)$ を時間 $\Delta\tau$ で $x_0, x_1, x_2, \dots$ に分割する
  - ただし  $x_i = x(i\Delta\tau)$
  - 再合成した入力  $x'(t) = \sum_{i=0} x_i$
  - 極限をとると  $\lim_{\Delta\tau \rightarrow +0} x'(t) = x(t)$



2012/05/07

11

# 畳み込み積分

- 複数のインパルス応答から出力を復元
  - 出力を重ね合わせの理で考える

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t-0)x(0)\delta(t) + g(t-\Delta t)x(\Delta t)\delta(t-\Delta t) \\ &\quad + g(t-2\Delta t)x(2\Delta t)\delta(t-2\Delta t) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} g(t-i\Delta t)x(i\Delta t)\delta(t-i\Delta t) \end{aligned}$$

- $\Delta t \rightarrow 0$ とすれば畳み込み積分

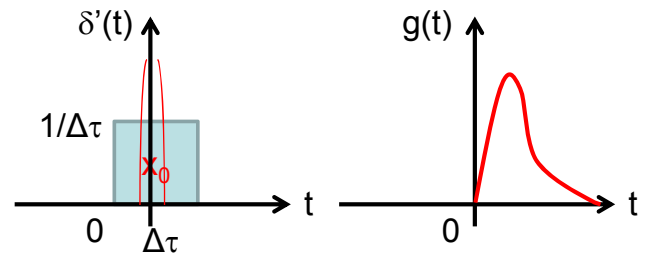
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

2012/05/07

12

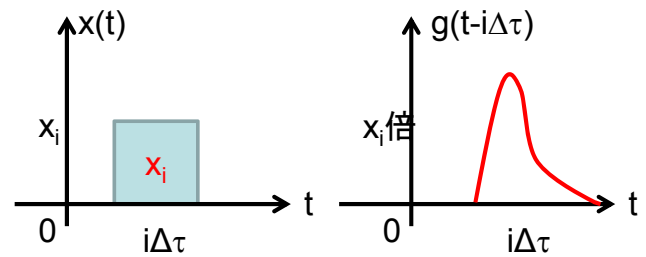
# インパルス応答

- $t=0$ で面積1となる基準入力  $\delta'(t)$  を考える(幅  $\Delta\tau$ , 高さ  $1/\Delta\tau$ )



- システムの応答を  $g(t)$  とする。ただし  $g(t)=0; t<0$

- 入力  $x_i$  は, 基準入力を時間  $i\Delta\tau$  ずらし, 高さを  $x_i\Delta\tau$  倍したもの(面積を合わせ)



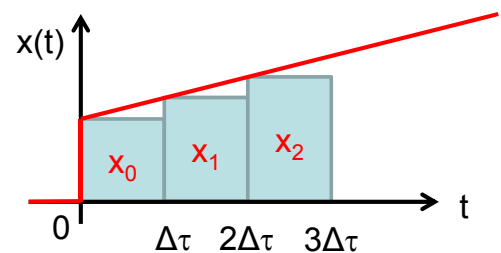
- 入力  $x_i$  に対する応答  $y_i(t)=g(t-i\Delta\tau) x_i\Delta\tau$

2012/05/07

13

# インパルス応答

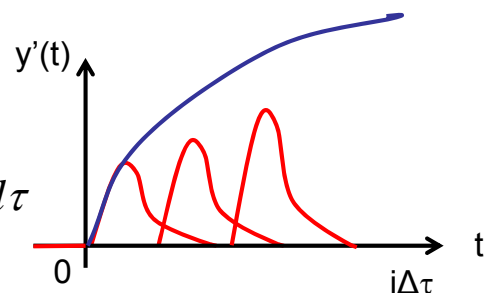
- 入力  $x'(t)$  に対する出力  $y'(t)$  は重ね合わせで得られる  $y'(t) = \sum_i y_i(t)$



$$= \sum_i g(t-i\Delta\tau) x_i\Delta\tau$$

- 極限をとると

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i g(t-i\Delta\tau) x_i\Delta\tau = \int_0^t g(t-\tau) x(\tau) d\tau$$



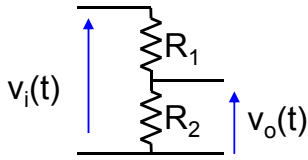
- 畳み込み積分

2012/05/07

14

# 伝達関数①

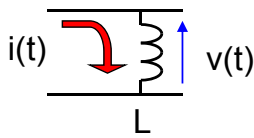
- 比例要素



$$v_i(t) : v_o(t) = R_1 + R_2 : R_2 \quad \Rightarrow \quad V_i(s) : V_o(s) = R_1 + R_2 : R_2$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- 微分要素



$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad \Rightarrow \quad V(s) = sLI(s)$$

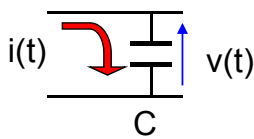
$$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL$$

2012/05/07

15

# 伝達関数②

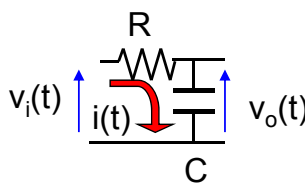
- 積分要素



$$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt \quad \Rightarrow \quad V(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

- 一次遅れ要素



$$\begin{cases} v_i(t) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt \\ v_o(t) = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_i(s) = RI(s) + \frac{I(s)}{sC} \\ V_o(s) = \frac{I(s)}{sC} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{sCR + 1}$$

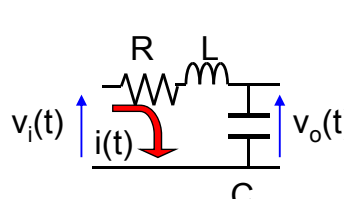
2012/05/07

16



## 伝達関数③

- 二次遅れ要素



$$\begin{cases} v_i(t) = Ri + L \frac{d}{dt} i + \frac{1}{C} \int idt \\ v_o(t) = \frac{1}{C} \int idt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_i(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{I(s)}{sC} \\ V_o(s) = \frac{I(s)}{sC} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad \begin{array}{l} T = \sqrt{LC} \\ \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{array}$$

- むだ時間要素

$$y(t) = u(t - \tau) \Rightarrow Y(s) = U(s)e^{-s\tau} \Rightarrow G(s) = e^{-s\tau}$$