制御工学I　第7回
過渡特性2

平成24年5月28日

授業の予定

- 制御工学概論（1回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（1回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（3回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（3回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（2回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（4回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

最終値の定理

- 制御システムの過渡応答の最終値を求める
  - ラプラス変換のまま最終値を求める
    - 導関数のラプラス変換$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$
      - 極限$s \to 0$を考える
        $\lim_{s \to 0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \to 0}\{sF(s) - f(0)\}$
        » 左辺$\lim_{s \to 0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} dt = \int_{f(0)}^{f(\infty)} df(t) = f(\infty)\text{-}f(0)$
        » 右辺$\lim_{s \to 0}\{sF(s) - f(0)\} = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0)$
      - $f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$となる

最終値の定理の利用

- 一次のシステムのステップ応答の最終値
  - $\mathrm{C}(s) = \frac{1}{1+sT}\frac{1}{s} \Leftrightarrow \mathrm{c}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$
    - $\lim_{s \to 0} sC(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+sT}\frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+sT} = 1$
    - $\lim_{t \to \infty}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = 1$
    - 一致する

初期値の定理

- 最終値の定理の双対
  - 導関数のラプラス変換

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

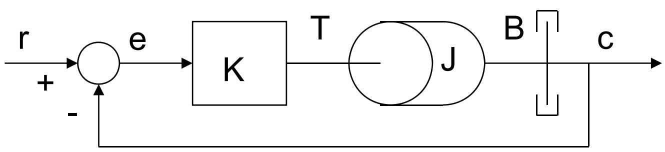
    - 極限$s \to \infty$を考える

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s\to\infty} \{sF(s) - f(0)\}$$

      - $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = 0$なので左辺$\lim_{s\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0$
      - 右辺$\lim_{s\to\infty} \{sF(s) - f(0)\} = \lim_{s\to\infty} \{sF(s)\} - f(0)$より
      - $\lim_{s\to\infty} \{sF(s)\} = f(0)$

二次のシステムの応答

- サーボシステム
  - 比例制御系
    - 入力位置r
    - 制御出力位置c
    - ゲインK
  - 負荷
    - 慣性J
    - 粘性抵抗B
    - トルクT
    - 運動方程式 $J\ddot{c} + B\dot{c} = T$



ラプラス変換

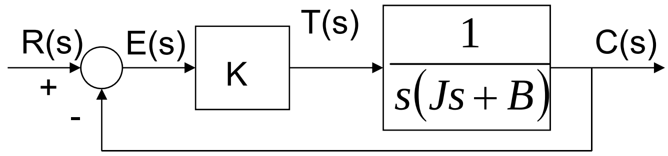
$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$$

二次のシステムの応答

- 負荷の伝達関数

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

ブロック線図



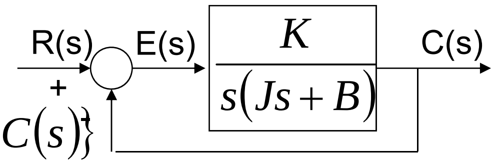
- 閉ループ伝達関数

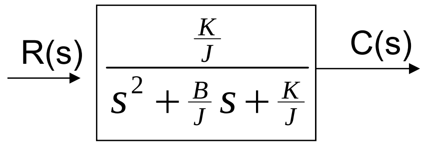
$$T(s) = K\{R(s) - C(s)\}$$

$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s) = K\{R(s) - C(s)\}$$

$$Js^2C(s) + BsC(s) + KC(s) = KR(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + B/J\, s + K/J}$$





二次のシステムの応答

- 閉ループ伝達関数

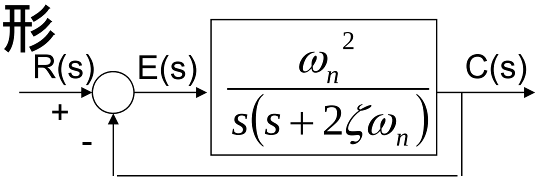
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + B/J\, s + K/J}$$

$$= \frac{K/J}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{J}{K}}\right]\left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{J}{K}}\right]}$$

  – 共役複素極 $B^2 - 4JK < 0$
  – 実極 $B^2 - 4JK \geq 0$

二次のシステムの応答

- 閉ループ伝達関数の標準形
  - 固有角周波数:ω_n
  - 減衰係数(減衰比):ζ
    - サーボシステムとの対応



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{Js^2+Bs+K}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

$$=\frac{\omega_n^{\ 2}}{\left(s+\omega_n\left[\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right]\right)\left(s+\omega_n\left[\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right]\right)}$$

$$\frac{K}{J}=\omega_n^{\ 2}$$

$$\frac{B}{J}=2\zeta\omega_n$$

二次のシステムの応答

- 二次のシステムの動特性
  - 伝達関数の特性方程式に関する判別式
    - 二つのパラメータζ, ω_nに支配される
      - 弱制動:$0<\zeta<1$→振動的
        - » :極が複素根となる
      - 過渡応答が永続(持続振動):$\zeta=0$
      - 臨界制動:$\zeta=1$
      - 過制動:$\zeta>1$

二次のシステムの応答
弱制動

- 弱制動:0<ζ<1→振動的

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

  - 複素根ではラプラス逆変換できない

– 固有角周波数ω_d (減衰があるとき)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_n{}^2 = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2$$

二次のシステムの応答
弱制動ステップ応答

- 単位ステップ入力に対する応答

$$C(s) = \frac{\omega_n{}^2}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2\right)}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d{}^2}$$

二次のシステムの応答 弱制動ステップ応答

- 部分分数展開

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}-\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}$$

- ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$L^{-1}\left[\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d{}^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

二次のシステムの応答 弱制動ステップ応答

$$L^{-1}[C(s)]=c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t+\zeta\sin\omega_d t\right)$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta)$$

減衰比ζで応答が変化

$$\sin\theta=\sqrt{1-\zeta^2},\cos\theta=\zeta$$

二次のシステムの応答
弱制動ステップ応答

- 入出力の誤差

$$e(t) = r(t) - c(t) \qquad t \geq 0$$

$$= 1 - \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right) \right\}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right)$$

減衰正弦波。t=∞で，$e^{-\zeta\omega_n t}$=0となり，誤差は無くなるe(∞)=0。

二次のシステムの応答
非減衰ステップ応答

- 減衰の無い場合ζ=0 $\quad C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$
  - 出力 $\quad c(t) = 1 - \cos\omega_n t \qquad t \geq 0$
  - 応答は固有角周波数での非減衰振動となる
    - 現実的にはζ=0とはならないので，非減衰の固有角周波数ω_nは観測できない
    - 観測できるのは減衰固有角周波数ω_d

$$\omega_n^2 = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 非減衰の固有角周波数より低い
- 減衰が増えると周波数は低下する
- 減衰ζ>1では，過制動となり振動しない

二次のシステムの応答 臨界制動ステップ応答

- 臨界制動(ζ=1)
  - 単位ステップ入力R(s)=1/sに対する応答

$$C(s)=\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

    - 伝達関数の二つの極が等しい
    - ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[\frac{\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s}\right]=1-e^{-\omega_n t}-e^{-\omega_n t}\omega_n t=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \qquad t\geq 0$$

二次のシステムの応答 臨界制動ステップ応答

- 弱制動の極限としての臨界制動ζ→1

$$\lim_{\zeta\to 1}\omega_d=\lim_{\zeta\to 1}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=0$$

$$\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t=\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$$

$$=\lim_{\zeta\to 1}\zeta\omega_n t\frac{\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}=\omega_n t$$

$$\lim_{\zeta\to 1}c(t)=\lim_{\zeta\to 1}\left\{1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right\}$$

$$=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$ 一致する

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 過制動(ζ>1)
  - 伝達関数の二つの極は異なる負の実数
  - 単位ステップ入力R(s)=1/sに対する応答

$$C(s)=\frac{{\omega_n}^2}{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2\right)}\frac{1}{s}$$

$$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2-{\omega_n}^2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ &= -\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n \end{aligned}$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 部分分数展開

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{{\omega_n}^2}{\left[s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]\left[s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{s} \\ &= \frac{A}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{B}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{C}{s} \end{aligned}$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 部分分数の係数を求める

$$A=\left[s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]C(s)\Big|_{s=-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{\left[-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

$$B=\left[s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]C(s)\Big|_{s=-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{\omega_n{}^2}{\left[-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}\frac{1}{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$C=sC(s)\Big|_{s=0}=\frac{\omega_n{}^2}{\left[0+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]\left[0+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right]}$$

$$=\frac{1}{\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}=\frac{1}{\zeta^2-\left(\zeta^2-1\right)}=1$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- 部分分数展開

$$C(s)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{\dfrac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{\dfrac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}\right]+\frac{1}{s}$$

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{\dfrac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{\dfrac{1}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}\right]\right]=$$

$$=1+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

- 定数項と二つの単調減衰項で構成される

二次のシステムの応答
過制動ステップ応答

- ζ>>1の場合
  - 指数関数的に減衰する二つの減衰項のうち一方は，もう一方に比べかなり早く減衰する
    - 早く減衰する方の振る舞いは無視できる

$$s_1 = \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), s_2 = \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right]$$

      - -s1に比べ,-s2が虚軸に近いなら-s1の項は無視できる
  - 早く減衰する項が収束した後，一次のシステムの応答で近似できる