

制御工学I 第8回

過渡特性3

平成24年06月04日

2012/06/04

1

授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

2012/06/04

2

二次のシステムの応答 過制動ステップ応答

- 過制動($\zeta > 1$)
 - 伝達関数の二つの極は異なる負の実数
 - 単位ステップ入力 $R(s) = 1/s$ に対する応答

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

$$= -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$= -\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

2012/06/04

3

二次のシステムの応答 過制動ステップ応答

- $\zeta \gg 1$ の場合
 - 指数関数的に減衰する二つの減衰項のうち一方は、もう一方に比べかなり早く減衰する
 - 早く減衰する方の振る舞いは無視できる $0 < -s_2 \ll -s_1$

$$-s_1 = \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), -s_2 = \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right]$$

– $-s_1$ に比べ、 $-s_2$ が虚軸に近いなら $-s_1$ の項は無視できる

- 早く減衰する項が収束した後、一次のシステムの応答で近似できる

2012/06/04

4

二次のシステムのステップ応答 過制動の一次システムでの近似

- 二次システムの応答 $c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right]$
 - 初期値: 0
 - 終端値: 1
- 一次システムでの近似 (s_1 無視) $C(s) = \frac{k}{s(s + s_2)}$
 - 係数 k を求める

$$sC(s)|_{s=0} = \frac{k}{0 + s_2} = \frac{k}{s_2} \quad [s + s_2]C(s)|_{s=-s_2} = \frac{k}{-s_2}$$

$$C(s) = \frac{k}{s_2} \frac{1}{s} - \frac{k}{s_2} \frac{1}{s + s_2}$$

2012/06/04

5

二次のシステムのステップ応答 過制動の一次システムでの近似

- 一次システムのラプラス逆変換

$$c(t) = \frac{k}{s_2} - \frac{k}{s_2} e^{-s_2 t}$$

- 初期値: 0 → 一致
- 終端値一致させる $\frac{k}{s_2} = 1 \quad k = s_2$

$$c(t) = 1 - e^{-s_2 t}$$

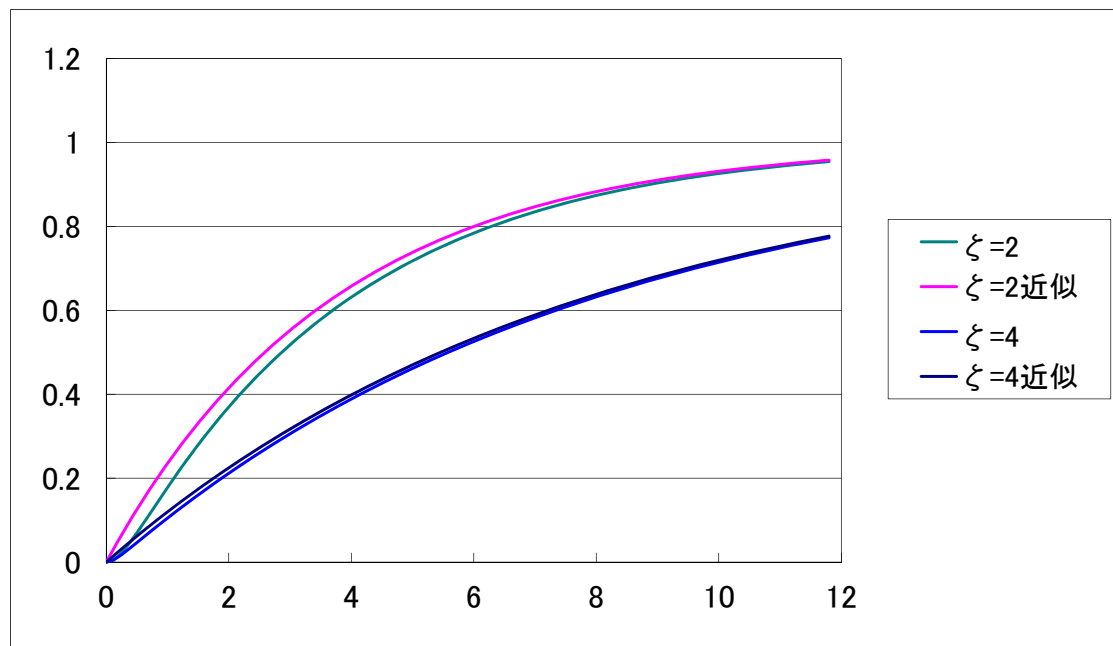
$$C(s) = \frac{s_2}{s(s + s_2)} = \frac{\omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{s \left(s + \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right)}$$

- 近似した伝達関数 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s_2}{s + s_2} = \frac{\omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{s + \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

2012/06/04

6

二次のシステムの応答 ステップ応答



2012/06/04

7

二次のシステムのステップ応答

- 入力

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

- 減衰係数による応答の分類

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- 持続振動: $\zeta=0$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \quad c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

- 弱制動: $0 < \zeta < 1$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$$

2012/06/04

8

二次のシステムのステップ応答

– 臨界制動: $\zeta=1$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \quad c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

– 過制動: $\zeta > 1$

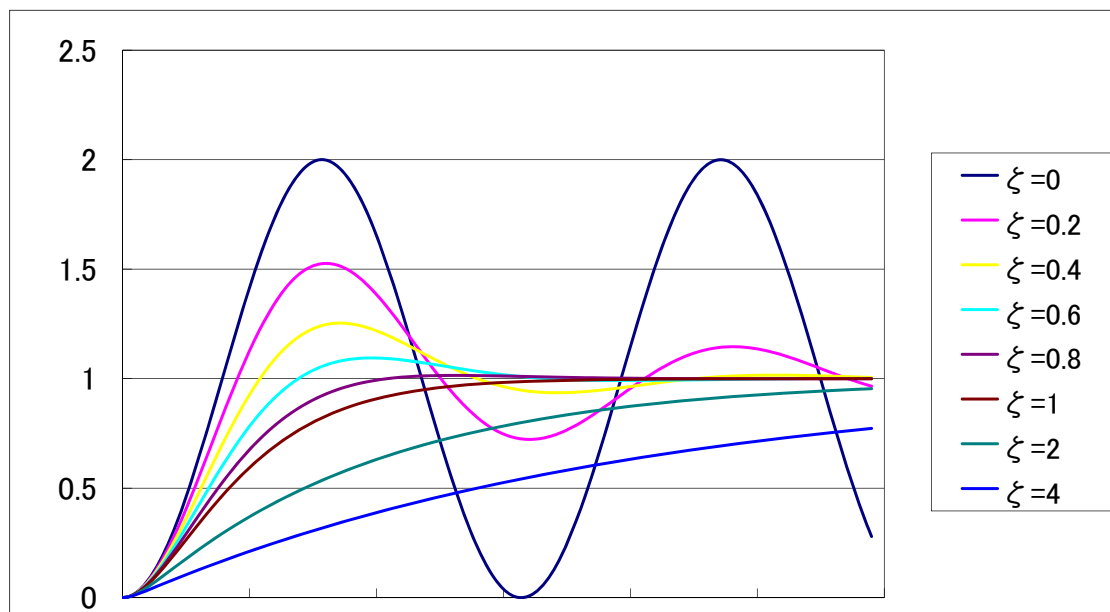
$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{1}{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} - \frac{1}{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} \right]$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right]$$

2012/06/04

9

二次のシステムの応答 ステップ応答



臨界制動($\zeta=1$)や過制動よりも、 $0.5 < \zeta < 0.8$ (弱制動)の方が最終値に近づくのが早い

2012/06/04

10

ステップ応答

- 単位ステップ入力に対する応答の評価基準

- 遅延時間: t_d

- 最終値の半分の値に至る時間

- 立ち上がり時間: t_r

- 10%→90%(過制動), 0%→100%(弱(不足)制動), 他5%→95%

- ピーク時間: t_p (過制動には無い)

- オーバーシュートにおける最初のピークの時間

- 最大行き過ぎ量: M_p (過制動には無い)

- 相対的な安定性を示す

$$M_p(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

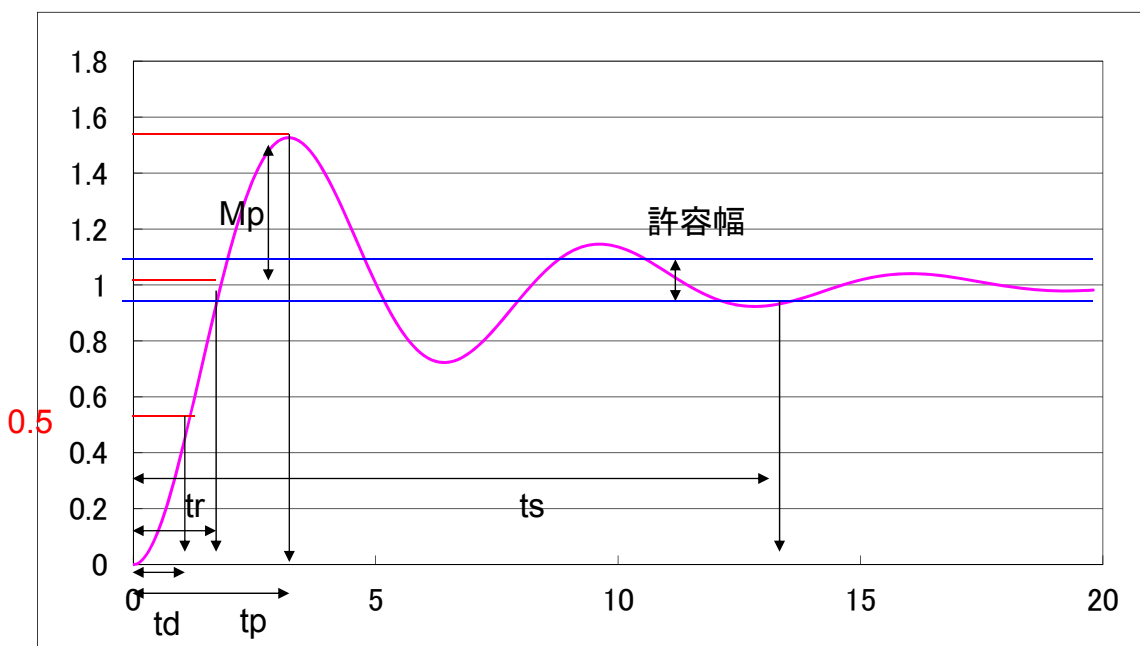
- 整定時間: t_s

- 最終値の2%または5%に値が収まる時間
- 制御系の最も時定数の長いものに関する

2012/06/04

11

ステップ応答



2012/06/04

12

ステップ応答

- 過渡応答の設計

- 振動が許容されないシステムを除き、過渡応答には速い追従と十分な減衰が要求される

- 二次のシステム

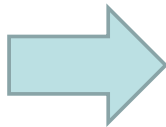
- 最大オーバシュート量と立ち上がり時間は競合する

- » 両者を同時に小さくすることはできない

- » $0.4 < \zeta < 0.8$ が適当

- » $0.4 > \zeta$ ではオーバシュート過剰となる

- » $0.8 < \zeta$ では応答が遅くなる



具体的な設計

2012/06/04

13

ステップ応答

- 二次のシステムの設計 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- 立ち上がり時間: t_r の設計
- パラメータの決定: 減衰比 ζ , 固有振動角周波数 ω_n

- 0% → 100% とする。

- 過渡応答の解析解: $c(t_r) = 1$ を解く
(振動応答の場合最初の解)

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_r + \zeta \sin \omega_d t_r \right)$$

ただし $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_r + \zeta \sin \omega_d t_r \right) = 0$$



2012/06/04

14

ステップ応答

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \neq 0 \quad \text{より} \quad \sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_r + \zeta \sin \omega_d t_r = 0$$

$$\frac{\sin \omega_d t_r}{\cos \omega_d t_r} = \tan \omega_d t_r = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{より}$$

$$\tan \omega_d t_r = \frac{-\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{-\omega_d}{\sigma}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{-\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{-\omega_d}{\sigma}$$

- t_r を小さくするには ω_d を大きくすればよい

2012/06/04

15

ステップ応答

- ピーク時間: t_p $\frac{d}{dt}c(t) = 0$

– 過渡応答波形の極値を取る時間(時間微分=0)

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$$

$$\frac{d}{dt}c(t) = -\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$$

$$-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(-\omega_d \sqrt{1-\zeta^2} \sin \omega_d t + \omega_d \zeta \cos \omega_d t \right)$$

$$= -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\begin{array}{l} -\zeta\omega_d \cos \omega_d t - \omega_n \zeta^2 \sin \omega_d t \\ -\omega_n (1-\zeta^2) \sin \omega_d t + \omega_d \zeta \cos \omega_d t \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ \text{を使う} \end{array}$$

2012/06/04

16

ステップ応答

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n \sin \omega_d t$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n \sin \omega_d t_p = 0$$

$$e^{-\zeta\omega_n t_p} \neq 0 \quad \sin \omega_d t_p = 0$$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

• 最初のピーク(弱制動)

$$\omega_d t_p = \pi \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \text{減衰振動周期の半分に相当}$$

ステップ応答

• 最大オーバシュート量: M_p

– ピーク時間 t_p にピーク値 $C(t_p)$ 発生

$$c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_p + \zeta \sin \omega_d t_p \right)$$

$$c\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) = 1 - \frac{e^{-\frac{\zeta\omega_n \pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \pi + \zeta \sin \pi \right)$$

$$= 1 + e^{-\frac{\zeta\omega_n \pi}{\omega_d}} = 1 + e^{-\frac{\zeta\omega_n \pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

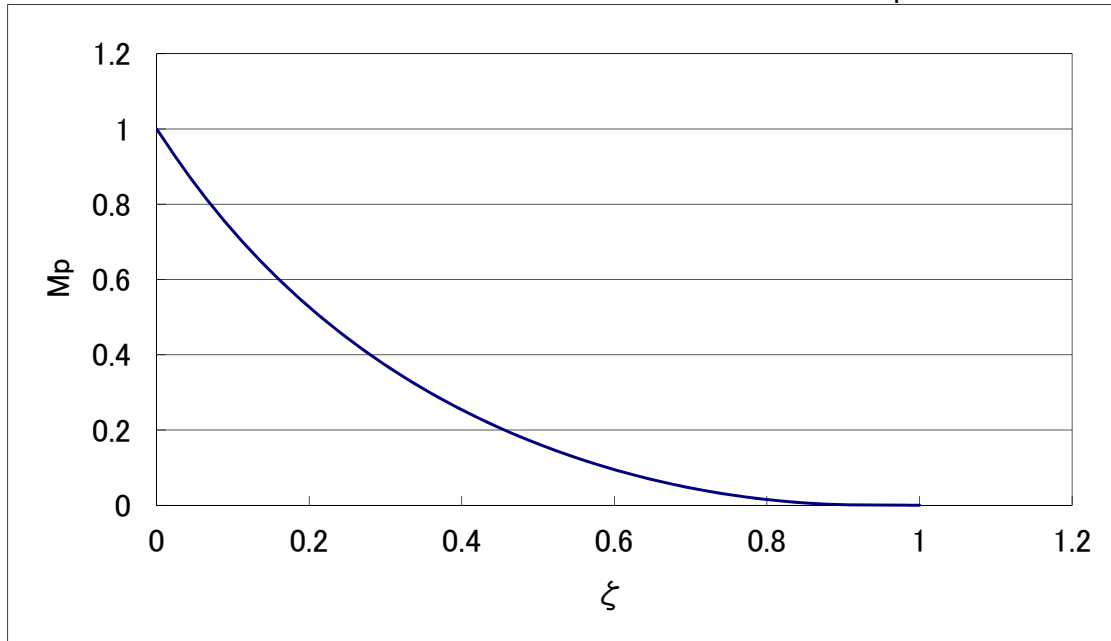
ただし $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = \frac{1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} - 1}{1} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

ただし $c(\infty) = 1$

ステップ応答

減衰比 ζ と最大オーバーシュート量 M_p の関係



0.4<ζ<0.7ではオーバーシュートは25%から4%となる

2012/06/04

19

ステップ応答

- 整定時間: t_s

- 弱制動時の過渡応答

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- 単位ステップ入力に対する応答の包絡線

- 時定数 $T = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{\sigma}$ σ :減衰

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- 与えられた ω_n に対して整定時間は減衰比 ζ の関数

- 時定数での近似

- » ±2%許容幅(時定数の4倍) $t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

- » ±5%許容幅(時定数の3倍)

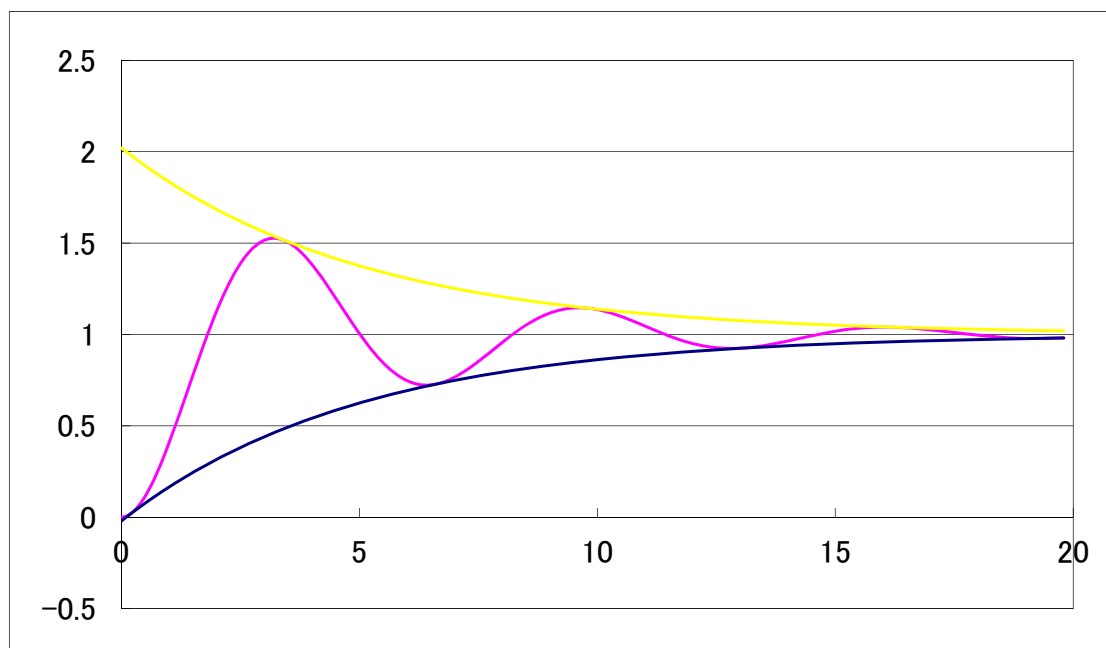
$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

2012/06/04

20

ステップ応答

減衰振動と包絡線



2012/06/04

21