

# 制御工学I 第9回

## 過渡特性残り 安定性

平成24年06月11日

## 授業の予定

- 制御工学概論(1回)
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

# 二次のシステムのインパルス応答

- 二次のシステム  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- 単位インパルス入力:  $r(t)$ 
  - ラプラス変換:  $R(s) = 1$ 
    - 単位インパルス → 単位ステップの微分に相当
  - 過制動 ( $\zeta > 1$ ) の応答

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\left[s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\right] \left[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\right]}$$

2012/06/11

3

# 二次のシステムのインパルス応答

過制動 ( $\zeta > 1$ )

部分分数分解

単なる計算なのでとばします

$$\begin{aligned} \left[ s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] C(s) \Big|_{s = -\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} &= \frac{\omega_n^2}{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \\ &= \frac{\omega_n}{-2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] C(s) \Big|_{s = -\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} &= \frac{\omega_n^2}{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

2012/06/11

4

# 二次のシステムのインパルス応答

過制動( $\zeta > 1$ )

部分分数分解の結果

$$C(s) = \frac{-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}}{s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})} + \frac{\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$c(t) = -\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})t} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})t}$$

$$= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})t} - e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})t} \right\}$$

$$0 < \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}) < \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})$$

より  $e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})t} - e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})t} > 0$   $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$

2012/06/11

5

# 二次のシステムのインパルス応答

- 臨界制動( $\zeta = 1$ )

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \omega_n^2 \left( \frac{1}{s + \omega_n} \right)^2 \quad \text{重根}$$

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

より  $c(t) > 0$  となる

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

2012/06/11

6

# 二次のシステムのインパルス応答

- 弱制動( $0 \leq \zeta < 1$ )

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2}$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t$$

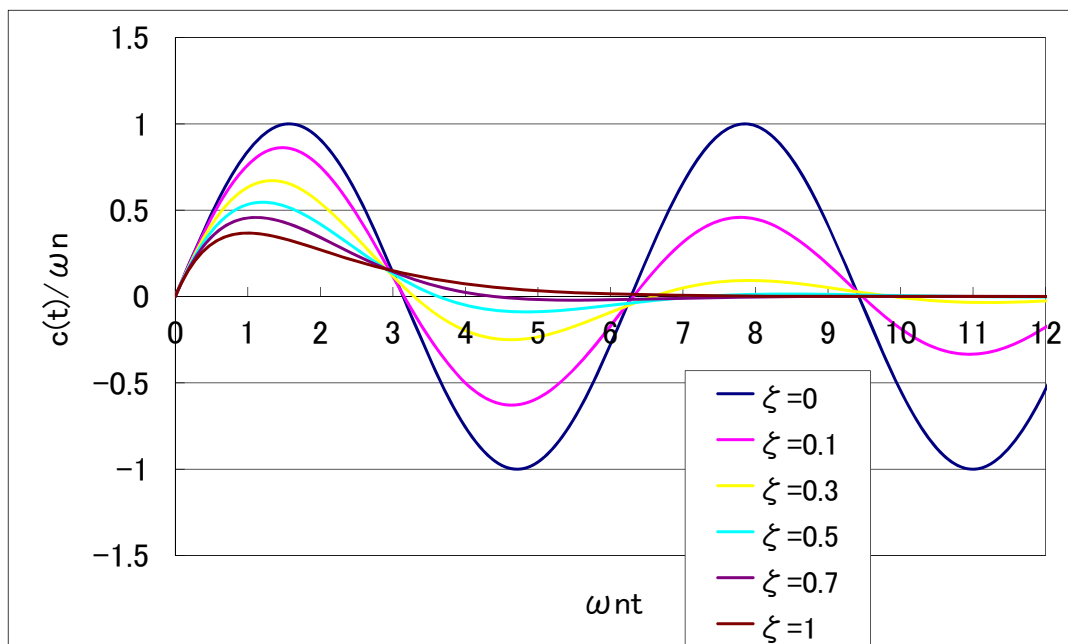
弱制動では振動的となる(負値もとる)  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$  ただし  $\zeta \neq 0$

2012/06/11

$0 = \zeta$  のとき  $c(t) = \omega_n \sin \omega_n t \rightarrow$  減衰しない

7

# 二次のシステムのインパルス応答



2012/06/11

8

## 二次のシステムのインパルス応答

- 過制動・臨界制動時は $c(t)$ の符号は変化なし
  - ただしピーク値をとる
  - 極値をとる $t_p$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t} - e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t} \right\} \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ -\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t} \right. \\ &\quad \left. + \omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t} \right\} \end{aligned}$$

## 二次のシステムのインパルス応答

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t) &= \frac{\omega_n^2}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ -(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t} \right. \\ &\quad \left. + (\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t} \right\} = 0 \\ (\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t} &= (\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t} \\ \frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}} &= \frac{e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t}}{e^{-\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})t}} = e^{-\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})t} = e^{-2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} \\ -2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t &= \log \frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}} \end{aligned}$$

# 二次のシステムのインパルス応答

$$t_p = -\frac{1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$c(t_p) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}) \frac{1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}} \\ -e^{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}) \frac{1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}} \end{array} \right\}$$

# 二次のシステムのインパルス応答

- 臨界制動

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= \frac{d}{dt} \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \\ &= \omega_n^2 \left\{ e^{-\omega_n t} - t \omega_n e^{-\omega_n t} \right\} \\ &= \omega_n^2 e^{-\omega_n t} \{1 - t \omega_n\} = 0 \end{aligned}$$

$$t_p = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\begin{aligned} c(t_p) &= \omega_n^2 \frac{1}{\omega_n} e^{-\omega_n \frac{1}{\omega_n}} \\ &= \omega_n e^{-1} \end{aligned}$$

# 二次のシステムのインパルス応答

- 弱制動

– 極値をとる $t_p$

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right]$$
$$= 0$$

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \begin{array}{l} -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \\ + \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \end{array} \right]$$

つづく

# 二次のシステムのインパルス応答

弱制動

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \begin{array}{l} -\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \\ + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \end{array} \right] = 0$$

$$-\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = 0$$

$$\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t$$

$$\frac{\sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t}{\cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} = \tan \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

# 二次のシステムのインパルス応答

- 極値をとる時間 $t_p$

$$\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$t_p = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}$$

# 二次のシステムのインパルス応答

- 最大値 $M_p=(t_p)$

$$c \left( \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}} \sin \left[ \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right]$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \left[ \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right]$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta^2 + \zeta^2}$$



# 二次のシステムのインパルス応答

- 最大オーバシュート量

$$c \left( \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}$$

2012/06/11

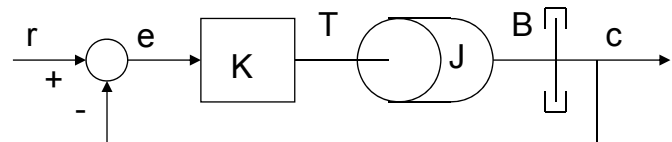
17

## 二次系の設計例 サーボシステムの制御系設計

- サーボシステム

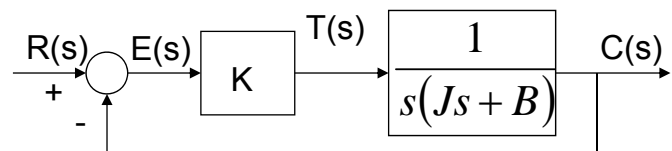
### – 比例制御系

- 入力位置  $r$
- 制御出力位置  $c$
- ゲイン  $K$



### – 負荷

- 運動方程式
  - 慣性  $J$
  - 粘性抵抗  $B$
  - トルク  $T$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}$$

ゲイン  $K$  しか調整できない → 減衰係数の調整をしたい

2012/06/11

18

# 二次系の設計例

## 速度フィードバックのサーボシステム

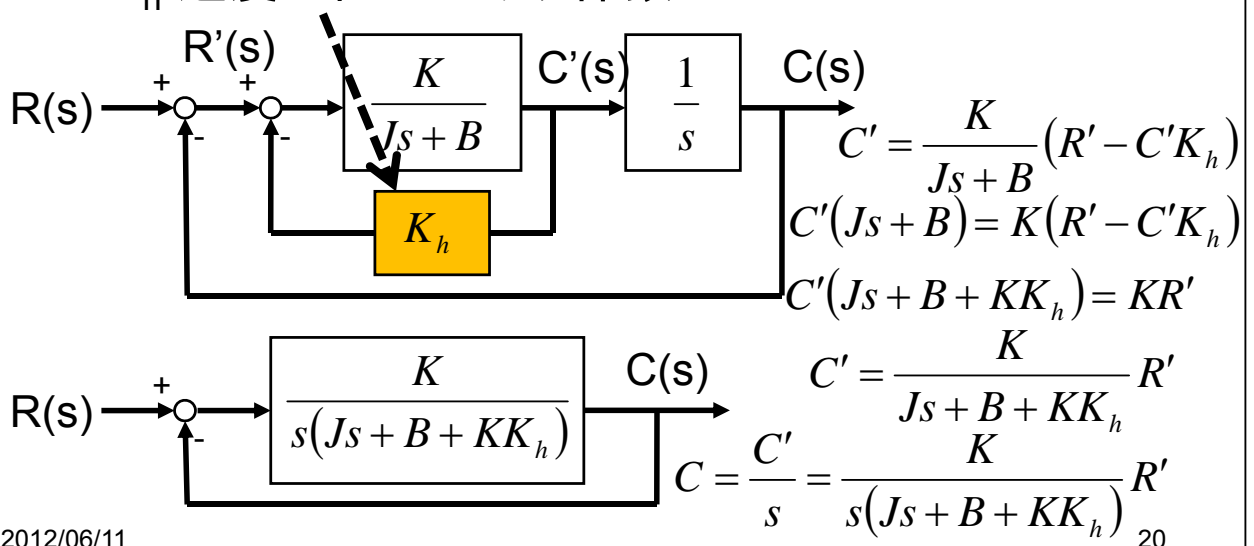
- システムの性能向上
    - 減衰係数の調整
    - 出力信号の微分値を利用
      - 位置の時間微分→速度
      - 微分は雑音に弱い
        - デジタル制御において微分は困難
        - タコメータ(直流発電機)
          - » 速度起電力が回転速度に比例
          - » 微分量が容易に得られる
- } 詳しくは電気機器で

2012/06/11

19

## 速度フィードバックのサーボシステム

- サーボシステム
  - 位置信号 $C(s)$ と速度信号 $C'(s)$ のフィードバック
  - $K_h$ :速度フィードバック係数



2012/06/11

20

# 速度フィードバックのサーボシステム

- 伝達関数

$$C = \frac{K}{s(Js + B + KK_h)}(R - C)$$

$$C \left[ 1 + \frac{K}{s(Js + B + KK_h)} \right] = \frac{K}{s(Js + B + KK_h)} R$$

$$C[s(Js + B + KK_h) + K] = KR$$

$$\begin{aligned} \frac{C}{R} &= \frac{K}{s(Js + B + KK_h) + K} \\ &= \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \end{aligned}$$

2012/06/11

21

# 速度フィードバックのサーボシステム

- 伝達関数

$$\frac{C}{R} = \frac{K/J}{s^2 + \frac{(B + KK_h)}{J}s + K/J} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

– 固有角周波数  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$

- 速度フィードバックの影響なし

– 減衰係数  $\zeta = \frac{B + KK_h}{J} \frac{1}{2\omega_n} = \frac{B + KK_h}{J} \frac{1}{2\sqrt{\frac{K}{J}}} = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}}$

- 速度フィードバックで減衰を大きくできる

- オーバシュートが小さくなるよう  $K_h$  で  $\zeta$  を 0.4~0.7 にする

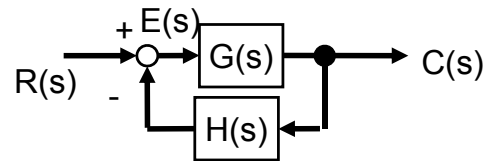
2012/06/11

$K, K_h$  を決める → 安定性の評価

22

# 制御システムの安定性

- フィードバック制御システムのブロック線図



- システムの伝達関数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

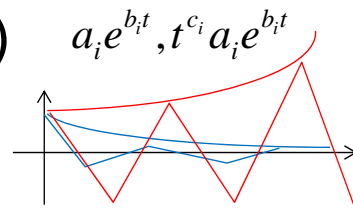
- システムの時間応答 (微分方程式の解)

- 重根なし  $c(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + \dots + a_n e^{b_n t}$
- 重根あり  $c(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + \dots + a_m e^{b_m t} + t^{c_1} a_{m+1} e^{b_{m+1} t} + \dots + t^{c_{n-m}} a_n e^{b_n t}$

# 制御システムの安定性

- 各項の時間応答 (振る舞い)

- $a_i$  は関係ない
- $a_i e^{b_i t}$  について



- $\text{Re}[b_i] < 0$ :  $b_i$  の実数部が負 → 時間と共に減衰
  - 実数 → 単調減少, 複素数 → 減衰振動
- $\text{Re}[b_i] = 0$ :  $b_i$  が虚数 → 振幅  $a_i$  の振動が持続
- $\text{Re}[b_i] > 0$ :  $b_i$  の実数部が正 → 時間と共に増大
  - 実数 → 単調増加, 複素数 → 発散振動
- 重根に対して  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  を考えるとOK

# 制御システムの安定性

- システムの振る舞い(時間応答)
  - システムの応答は各項の和  $a_i e^{b_i t}, t^{c_i} a_i e^{b_i t}$ 
    - 全ての $b_i$ の実数部が負
      - 各項がすべて時間と共に減衰
      - $t \rightarrow \infty$ で $c(t) \rightarrow 0$ となる → 安定
    - 虚数の $b_i$ (実数部が0), 他の実数部が負  $a_i e^{b_i t}$ 
      - 虚数項における一定振幅の振動が持続 → 安定限界
    - 実数部が正の $b_i$ が含まれる
      - $b_i$ が正の実部を持つ項が $t \rightarrow \infty$ で発散
      - $t \rightarrow \infty$ で $c(t) \rightarrow \infty$ となる → 不安定
      - 正の実数 → 単調増加, 複素数 → 発散振動