数值解析
第10回　補間法
補間多項式

舟木　剛

平成25年12月04日２限

シラバス

- 授業の目的
  - 工学分野でよく用いられる数値計算の算法ならびにそれらの数値的な特性について理解させる.
- 授業計画
  - 数値計算と誤差（1回）
    - 数値計算の必要性ならびに誤差の種類について説明するとともに，行列式とその性質，行及び列の交換などの基本演算，逆行列の定義と求め方について説明する.
  - 代数方程式（2回）
    - ２分法，Newton-Raphson 法，Bailey 法について解説する. また，多変数に対するNewton-Raphson 法と収束に関する留意点について述べる.
  - 連立方程式（3回）
    - Gauss の消去法，Gauss-Jordan の掃き出し法，LU 分解法の手順ならびに計算複雑度について解説する. また，Jacobi 法，Gauss-Seidel 法，SOR 法などの反復法について手順並びに収束条件について解説する.
  - 行列の固有値（3回）
    - 固有値の性質，べき乗法，Householder 法，QR 法について述べる. QR 法の収束定理について解説する.
  - 補間法（2回）
    - 線形補間，Lagrange 補間，Newton 補間，スプライン補間について述べる. 多項式補間については算出方法をスプライン補間については3次のスプライン関数の導出方法を説明する. また，自然なスプライン関数とその特徴について解説する.
  - 関数近似（1回）
    - 最小2乗法による関数の近似について解説する.
  - 数値積分（1回）
    - 台形公式，シンプソンの公式による数値積分について解説する.
  - 常微分方程式（1回）
    - 単区分法である Euler 法，修正Euler 法，Runge-Kutta 法ならびに複区分法である Adams-Moulton の予測子・修正子法について解説する. また，数値不安定性についても解説する.
- 教科書 佐藤・中村共著「よくわかる数値計算」日刊工業新聞社

補間

- 補間関数$y = f(x)$
  - n個のデータ点$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$を全て通る
  - x_i ⇒ 補間点
- 補間（内挿）
  - 補間関数により$x \neq x_i$に対するyを求める
    - 例
      - 線形補間
      - ラグランジュ補間
      - ニュートン補間
      - スプライン補間
- 次々回でやる最少二乗近似の関数はデータ点を通るとは限らない。

多項式補間

- 補間関数$g(x)$
  - n次多項式$g_n(x)$（ n次補間多項式）
    - $g_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
  - 相異なる$n + 1$個の補間点を通るn次多項式は一意に定まる
- 逆補間
  - 与えられたyに対して$y = f(x)$の逆関数$x = f^{-1}(y)$を補間多項式として求める

線形補間

- 異なる2点$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$を直線(一次関数$f(x)$)で結ぶ
  - 線形関数$f(x) = ax + b$
    - $\begin{cases} y_0 = ax_0 + b \\ y_1 = ax_1 + b \end{cases}$
  - $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$
  - $f(x) = y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$

1次のラグランジュ補間

- 異なる2点$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$を通る1次関数$y = g_1(x)$
  - $g_1(x) = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0)$
    - $y_0 = a_0(x_0 - x_1) + a_1(x_0 - x_0) = a_0(x_0 - x_1)$
      - $a_0 = \frac{y_0}{x_0 - x_1}$
    - $y_1 = a_0(x_1 - x_1) + a_1(x_1 - x_0) = a_1(x_1 - x_0)$
      - $a_1 = \frac{y_1}{x_1 - x_0}$
    - $g_1(x) = \frac{y_0}{x_0 - x_1}(x - x_1) + \frac{y_1}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

2次のラグランジュ補間

- 3点$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$を通る2次関数$y = g_2(x)$
  - $x_0 \neq x_1 \neq x_2$
  - $g_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$
    - 未定係数a_0, a_1, a_2
    - $y_0 = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + a_1(x_0 - x_0)(x_0 - x_2) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$
      - $a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$
    - $y_1 = a_0(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) + a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) = a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$
      - $a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}$
    - $y_2 = a_0(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) + a_1(x_2 - x_0)(x2_1 - x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)$
      - $a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)}$
    - $g_2(x) = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}(x - x_1)(x - x_2) + \frac{y_1}{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}(x - x_0)(x - x_2) + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)}(x - x_0)(x - x_1)$

ラグランジュ補間

- 関数$f(x)$に対して，$n + 1$個の点$x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$の関数値$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$が与えられている
- n次多項式$g_n(x)$により$g_n(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,1, \cdots, n)$を満たす補間を考える
- ラグランジュ補間
  - $g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$
  - $l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$

$(x - x_j)$は無

n次式

$(x_j - x_j)$は無

ラグランジュ補間

- $l_j(x_i) = \frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})\cdots(x_i-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} = 0,$ $i \neq j$
- $l_j(x_j) = \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} = 1$
- 関数$g_n(x_i)$は$n+1$個の点(x_i, y_i) $i = 0,1,\cdots,n$を通る
  - $g_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x_i) = f(x_0)l_0(x_i) + f(x_1)l_1(x_i) + \cdots + f(x_i)l_i(x_i) + f(x_n)l_n(x_i) = f(x_i)l_i(x_i)$
- $x \neq x_i$ $(i = 0,1,\cdots,n)$に対して，n次多項式$l_j(x)$の重み$f(x_j)$による加重和として補間を表す

ニュートン補間

- 異なる$n+1$個の補間点を通るn次多項式$g_n(x)$は一意に定まる
  - ラグランジュ補間もニュートン補間も得られる結果は同じ（数式の表し方が異なるだけ）
  - ラグランジュ補間は補間多項式の係数を一度に求める
  - ニュートン補間は，既に求めた低次の補間多項式と追加した補間点を用いて，多項式の次数を高くする方法

1次のニュートン補間

- 異なる2点$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$を通る1次関数$y = g_1(x)$
  - (x_0, y_0)を通る1次関数$y - y_0 = m_1(x - x_0)$
    - $g_1(x) = y_0 + m_1(x - x_0)$
    - (x_1, y_1)を通る$y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0)$
    - 近似したい元の関数$f(x)$に対して$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$
    - 未定係数$m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
      - 0次の差分商$f[x_0] = f(x_0) = y_0, f[x_1] = f(x_1) = y_1$
      - 1次の差分商$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m_1$
      - $g_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$

2次のニュートン補間

- 異なる3点$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$を通る2次関数$y = g_2(x)$
  - 1次の補間多項式$g_1(x)$に2次の項$m_2(x - x_0)(x - x_1)$を付加する
    - $g_2(x) = g_1(x) + m_2(x - x_0)(x - x_1) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0)y_0 + m_2(x - x_0)(x - x_1)$
      - $g_2(x)$は(x_0, y_0)を通る
        - » $g_2(x_0) = g_1(x_0) + m_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) = g_1(x_0) = y_0$
      - $g_2(x)$は(x_1, y_1)を通る
        - » $g_2(x_1) = g_1(x_1) + m_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) = g_1(x_1) = y_1$
      - $g_2(x)$が(x_2, y_2)を通るようなm_2を求める

2次のニュートン補間

- $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$を通る1次の補間多項式の拡張
  - $g_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1)$
- $(x_0, y_0), (x_2, y_2)$を通る1次の補間多項式の拡張
  - $g_2(x) = f[x_0] + f[x_2, x_0](x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_2)$
- 2つの補間多項式は同じ← 一意性
  - $g_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) = f[x_0] + f[x_2, x_0](x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_2)$
  - $\{f[x_1, x_0] - f[x_2, x_0]\}(x - x_0) = m_2(x - x_0)\{(x - x_2) - (x - x_1)\} = m_2(x - x_0)(x_1 - x_2)$
  - $m_2(x_1 - x_2) = f[x_1, x_0] - f[x_2, x_0]$
  - $m_2 = \frac{f[x_1,x_0]-f[x_2,x_0]}{x_1-x_2}$ 二次の差分商

2次のニュートン補間

- 2次の差分商
  - $f[x_0, x_1, x_2] = m_2 = \frac{\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}}{x_1-x_2} = \frac{(y_1-y_0)(x_2-x_0)-(y_2-y_0)(x_1-x_0)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)(x_2-x_0)} = \frac{(y_1-y_0)x_2-(y_2-y_0)x_1+\{(y_2-y_0)-(y_1-y_0)\}x_0}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)(x_2-x_0)} = \frac{(y_1-y_0)x_2-(y_2-y_0)x_1+(y_2-y_1)x_0}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)(x_2-x_0)} = \frac{(y_1-y_2)x_0+(y_2-y_0)x_1+(y_0-y_1)x_2}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_0)}$

n次のニュートン補間

- n次の差分商$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$を用いた表現
  - $n+1$個の異なる補間点を通るn次多項式$g_{\mathrm{n}}(x)$のx^nの係数は，n次の差分商で表される
    - $g_n(x) = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + m_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$
      - $m_{\mathrm{k}} = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \qquad (k = 1,2, \cdots, n)$
    - n次の差分商は唯一
      - n次の差分商の一般形
      - $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$

n次の差分商の一般形

- n次のニュートン補間多項式
  - $g_n(x) = g_{n-1}(x) + m_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = g_{n-2}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2}) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = g_{n-2}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2}) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2})(x - x_n)$
  - $f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2}) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2}) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2})(x - x_n)$
  - $\{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n]\}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2}) = \{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}](x - x_n) - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1})\}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-2})$

n次の差分商の一般形

- $f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n] = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}](x - x_n) - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1}) = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n]\{(x - x_n) - (x - x_{n-1})\} = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n](x_{n-1} - x_n)$
- $f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_n]}{x_{n-1} - x_n}$
- どの補間点を使うかには依存しないので
- $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$

多項式補間の誤差

- 近似しようとする関数$f(x)$
  - 異なる$n+1$個の補間点x_i $(i = 0,1, \cdots, n)$に対するn次の補間多項式$g_n(x)$
  - 補間多項式の誤差$E(x)$
    - $E(x) = f(x) - g_n(x)$
    - 補間点において誤差は0となる
      - $E(x_i) = f(x_i) - g_n(x_i) = 0$
- $n+1$次の多項式
  - $F(x) = E(x) - K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = E(x) - K \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$
    - $n+1$ 次なのでKを用いて$n+1$個の補間点x_i $(i = 0,1, \cdots, n)$の他に1点x'で$F(x') = 0$とできる。

多項式補間の誤差

- 補間多項式$g_n(x)$はn次式
  - $n+1$回微分は$\frac{d^n}{dx^n} g_n(x) = 0$となる，$\frac{d^n}{dx^n} K \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = K(n+1)!$
  - $f(x)$を$n+1$回微分可能として，$n+1$回微分を$f^{(n+1)}(x)$と表す
  - $F(x)$の$n+1$回微分$F^{(n+1)}(x) = E^{(n+1)}(x) - K(n+1)! = f^{(n+1)}(x) - K(n+1)!$
  - $x = x^*$において$F^{(n+1)}(x^*) = 0$となるようにKを定める
    - $F^{(n+1)}(x^*) = f^{(n+1)}(x^*) - K(n+1)! = 0$
    - $K = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}$
    - $F(x) = E(x) - \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

多項式補間の誤差

- $F(x') = 0$より
  - $F(x') = E(x') - \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x' - x_i) = 0$
  - x'は区間$[x_0, x_n]$にあり $x' \neq x_i$ $(i = 0,1,\cdots,n)$の任意の点x
    - x'における誤差
      - $E(x') = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x' - x_i)$
        - » $|x' - x_i| \leq |x_n - x_0|$ $(i = 0,1,\cdots,n)$より$\prod_{i=0}^{n}(x' - x_i) \leq (x_n - x_0)^{n+1}$
        - » $\left|f^{(n+1)}(x^*)\right| \leq \max_{x_0 \leq x^* \leq x_n} f^{(n+1)}(x^*)$
        - » $E(x') \leq \frac{\max_{x_0 \leq x^* \leq x_n} f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x_n - x_0)^{n+1}$
    - $x' = x_i$ $(i = 0,1,\cdots,n)$では$E(x_i) = 0$