

制御工学I 第11回
安定性
フルビッツの安定判別
周波数特性
正弦波入力に対する応答

平成26年6月23日

授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

フルビッツの安定判別法

$$a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

- 特性多項式の係数からフルビッツ行列を作成

– nxn行列

– 要素 a_{n-1} よりはじめる

- 一つ右に移る毎に
係数を2減らす

- 一つ下に移る毎に
係数を1増やす

- $a_n=1$

- $a_k=0$ $k>n$ or $k<0$

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_n & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & 0 \\ & 0 & a_{n-1} & & a_1 & 0 & 0 \\ & & a_n & & a_2 & a_0 & 0 \\ & & & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

フルビッツの安定判別法

- フルビッツ行列式の作成

- 左上 $k \times k$ 小行列の行列式 Δ_k ($k=1, 2, \dots, n-1$)
(主座小行列式)

$$\Delta_1 = a_{n-1} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \cdots \Delta_{n-1} = \det H_{n-1}$$

- 安定判別法

- 特性方程式の根の実部が全て負となる条件
($k=1, 2, \dots, n-1$) $\Delta_k > 0$

フルビッツの安定判別法

- 例題

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_3 > 0 \quad a_i > 0 \text{なので満足} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3a_2a_1 - a_4a_1^2 - a_0a_3^2 = \underline{a_1(a_3a_2 - a_4a_1) - a_0a_3^2} > 0$$

$\Delta_3 > 0$ を満足すれば $\Delta_2 > 0$ も満足

根軌跡法

- システムの過渡応答は極の位置(値)に関する
- 制御ゲインにより極の場所(値)が変わる
 - どのように変化するのか注目
- 設計
 - 適切なゲインの設定により, 極を所望の場所に配置
 - 移動できないときは補償器を使用
 - システムの極や零の追加の影響の定性的な評価

根軌跡

- ゲインKを持つフィードバック制御システム

- 閉ループ伝達関数

- $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$
- 各要素をsの多項式で表す

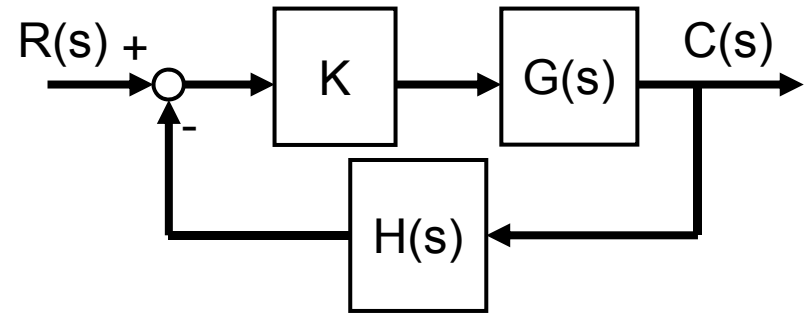
- $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, H(s) = \frac{d(s)}{c(s)}$

- $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \frac{b(s)}{a(s)}}{1 + K \frac{b(s)d(s)}{a(s)c(s)}} = K \frac{b(s)}{a(s)} \frac{a(s)c(s)}{a(s)c(s) + Kb(s)d(s)} =$
 $K \frac{b(s)c(s)}{a(s)c(s) + Kb(s)d(s)}$

- $a(s)c(s) + Kb(s)d(s) = 0 \rightarrow$ 根は伝達関数の極

- $b(s)c(s) = 0 \rightarrow$ 根は伝達関数の零点

- $K: 0 \rightarrow \infty$ で伝達関数の極(特性方程式の根)は変化



周波数応答を用いた 制御システムの解析と設計

- 周波数応答とは
 - 正弦波入力に対する出力の周期定常状態
 - 周波数応答解析と根軌跡解析は似たもの同士
 - ゲイン変化, 周波数変化
 - Nyquist, Bode, Nicholsら
 - ロバスト制御で必要となる
- 周波数応答の利点
 - 実験結果から伝達関数の推定が可能

正弦波入力に対する定常状態出力1

- 安定な線形時不変システム

- 伝達関数 $G(s)$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{(s+b_1)(s+b_2)\cdots(s+b_m)}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}$$

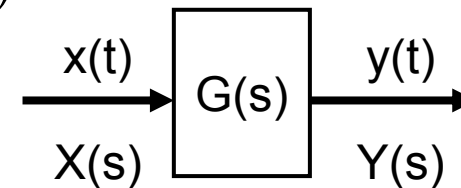
- 入力 $x(t)$ → 正弦波

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- 出力 $y(t)$ → 正弦波となる

(ただし振幅・位相は異なる)



正弦波入力に対する定常状態出力2

- ラプラス変換形式の入力 $X(s)$ と出力 $Y(s)$

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}X(s)$$

- 正弦波に対する伝達関数の定義
– ラプラス演算子 s を $j\omega$ に置き換える

$$s e^{j\omega t} \rightarrow \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \Rightarrow s \rightarrow \frac{d}{dt} = j\omega$$

$$G(j\omega) = M e^{j\phi} = M \angle \phi$$

- 入出力正弦波の振幅比: M , 位相差: ϕ

正弦波入力に対する定常状態出力3

- **安定な**線形時不変システムの正弦波入力に対する応答の(周期)定常状態は, 初期値に依存しない。
 - 初期値0と仮定して求める(部分分数展開)

- 重根を持たない場合の応答

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$
$$= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1'}{s + a_1} + \frac{b_2'}{s + a_2} + \dots + \frac{b_n'}{s + a_n}$$

– ただし $a, \bar{a}, b_1', \dots, b_n'$ は定数

正弦波入力に対する定常状態出力4

- ラプラス逆変換による時間応答の解($t \geq 0$)
 - $y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1'e^{-a_1t} + b_2'e^{-a_2t} + \dots + b_n'e^{-a_nt}$
 - 安定なシステムでは $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$ の実部は負
 - $e^{-a_1t}, e^{-a_2t}, \dots, e^{-a_nt}$ 各項は $t \rightarrow \infty$ でゼロに収束
 - 入力に対応する二項は収束しない
 - 重根を持つ場合
 - m_j 重根 $s_j \rightarrow t^{h_j}e^{-s_jt}$ ($h_j = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$)
 - 安定なシステムでは $t \rightarrow \infty$ で $t^{h_j}e^{-s_jt}$ はゼロに収束する
 - » Expのテーラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

正弦波入力に対する定常状態出力5

- 安定なシステムの定常状態の応答

単根, 重根に関係なく $t \rightarrow \infty$ で $y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$

– 部分分数の係数

$$a = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = G(s) \frac{A\omega}{s - j\omega} \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = G(s) \frac{A\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

正弦波入力に対する定常状態出力6

- 周波数応答の極座標表示

- 伝達関数 $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$

- 振幅 $|G(j\omega)|$

- 位相 $\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]}$

- 負の周波数に対する伝達関数

- $G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$

- 部分分数の係数

- $$a = -\frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

正弦波入力に対する定常状態出力7

- 定常状態の時間応答出力 $y_{ss}(t)$

$$\begin{aligned}y_{ss}(t) &= ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \\&= -\frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}e^{j\omega t} \\&= A|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \\&= A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \phi) \\&= Y \sin(\omega t + \phi) \quad \longleftarrow \text{正弦波}\end{aligned}$$

↑ 位相・振幅は入力と異なる ↗ $Y = A|G(j\omega)|$

正弦波入力に対する定常状態出力8

- 周波数伝達関数

- $\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{(j\omega+b_1)(j\omega+b_2)\cdots(j\omega+b_n)}{(j\omega+a_1)(j\omega+a_2)\cdots(j\omega+a_n)}$

- 入力正弦波に対する出力正弦波の振幅比

- $|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|$

- 入力正弦波に対する出力正弦波の位相ずれ

- $\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$